

Chapitre 2

Stratégies d'optimisation par PE

Stratégies d'optimisation par PE

1. Introduction

Ce deuxième chapitre présente différentes stratégies d'optimisation utilisant la méthode des plans d'expériences comme fondement.

Ces méthodes héritent des principales caractéristiques de la MPE. Il est donc naturel de retrouver pour chacune d'elles :

- le très fort lien existant entre plans d'expériences et modèles : les techniques d'optimisation sont le plus souvent des techniques de modélisation (partielle ou globale) donnant la possibilité après coup de déduire les grandeurs optimales recherchées ;
- l'approche algébro-statistique de la MPE : tous les calculs (de coefficients de modèles, d'analyses de variances, etc.) sont réalisés dans un cadre probabiliste et statistique ;
- l'aspect déterministe de la MPE : la détermination, la réalisation et l'exploitation de tout plan d'expériences sont des étapes parfaitement déterministes ; néanmoins, cela ne signifie pas que les variables étudiées (les facteurs et les réponses principalement) ne soient pas des variables aléatoires : il a été vu qu'il existait dans tous les cas une variance expérimentale.



Comme toutes les méthodes d'optimisation, les techniques présentées ici ont pour objectif la recherche des valeurs optimales de la fonction réponse.

Cependant, dans le même temps, les méthodes d'optimisation par la MPE doivent très souvent tenir compte :

- du coût global du processus d'optimisation : il faut ici considérer le coût de chaque expérience ainsi que des performances de la stratégie utilisée ;
- de la nature des facteurs : certains algorithmes permettent de gérer les problèmes mixtes, c'est-à-dire lorsque certains facteurs sont discrets (ou discrétisés) et les autres continus ;
- de la précision sur la valeur des facteurs : il faut tenir compte de la précision maximale envisageable pour chaque facteur continu, définie par sa valeur associée π_j ; aller au delà n'aurait aucune signification ;
- de la nature des contraintes : certaines méthodes d'optimisation recourent aux plans optimaux pour répondre aux problèmes des contraintes en position ; quant aux contraintes en valeurs

Introduction

atteintes, elles peuvent être modélisées par la MPE elle-même, au même titre que la fonction objectif.

L'optimisation par la méthode des plans d'expériences s'inscrit donc dans un cadre généralement plus contraignant que l'optimisation « classique », car elle doit prendre en compte des réalités « pratiques ».

Plusieurs solutions sont ici proposées afin de répondre au mieux aux considérations listées ci-dessus. Toutes utilisent les plans d'expériences comme élément de base. Elles se distinguent les unes des autres par :

- les caractéristiques des plans utilisés (type, taille, etc.) ;
- l'information déduite de la réalisation des plans (aucun modèle, modèles du premier ordre, modèles particuliers, etc.) ;
- le placement des plans, les uns par rapport aux autres (décalés, emboîtés, intersectés, etc.) ;
- le mode de placement d'un plan relativement à un autre (droites de meilleures valeurs, considération des partitions d'un domaine donné, etc.) ;
- le mode de détermination des caractéristiques du point optimal (coordonnées d'un point d'expérience, recoupement de 2 chemins optimaux, etc.) ;
- les grandeurs considérées pour les tests d'arrêt (valeurs de réponse, volumes des domaines successifs, etc.).

Dans une première partie sera discuté le problème de l'économie du nombre d'expériences au cours des processus d'optimisation. Cette question amènera à considérer plus particulièrement la technique fondamentale de la *recupération de points d'expériences entre plans*. Il s'agit en effet d'un atout majeur de la MPE.

La partie suivante sera consacrée à la présentation de 8 stratégies d'optimisation basées sur la MPE. Elles ont été classées en 3 groupes, suivant leur comportement général :

- les *méthodes par glissements* de plans ;
- les *méthodes par zooms* successifs ;
- les *méthodes de modélisation globale (méthodes exhaustives)*.

Pour chacune d'elles, les considérations techniques et théoriques seront illustrées par leur application à la recherche des conditions optimales d'une même fonction test analytique présentée au paragraphe 3.1. .

Pour clore ce chapitre, les performances des différentes méthodes seront discutées et comparées.

Les références bibliographiques concernant l'étude des dispositifs électrotechniques sont extrêmement nombreuses, tant au niveau des ouvrages et des thèses que des publications de congrès et de revues. On pourra globalement y distinguer l'aspect *modélisation – conception* de l'*optimisation* à proprement parler.

La modélisation et la conception des systèmes électriques sont principalement traitées par l'utilisation de la méthode des éléments finis ([Gillon 97] [Brisset 95] [ElAmraoui 02] [Caldora 01] [Kaddad 93]). Ces mêmes opérations sont également parfois abordées par le recours à la méthode des réseaux de perméances ([Hecquet 95] [Delforge 95]) ou par toute autre technique ([Kone 93] [Wurtz 96]). Seuls quelques articles présentent des travaux où la méthode des plans d'expériences est employée comme méthodologie de base à l'étude ([Zaoui 00] [Kim 01] [Dyck 99] [Caldora1 01]).

L'optimisation des dispositifs électrotechniques fait parallèlement l'objet de parutions de plus en plus nombreuses depuis quelques années. L'usage des méthodes stochastiques se répand ([Ho 01] [Vasconcelos 97] [Gallardo 99] [Saludjian 97]) ; elles sont souvent comparées aux méthodes déterministes et viennent parfois à être combinées avec elles pour former des méthodes hybrides ([Alotto 00] [Farina 01] [Seguin 99]).

De la même façon, il y a un nombre croissant de parutions présentant des optimisations de systèmes électrotechniques par l'utilisation de la méthode (déterministe) des plans d'expériences ([Brisset 01] [Gillon 98] [Gao 01] [Rong 97] [Tsunoda 00]).

Introduction

Tous ces travaux ont en commun une utilisation limitée de la MPE : chacune des procédures d'optimisation présentées se base sur la réalisation et l'analyse d'un unique plan d'expériences. Ce deuxième chapitre visera à élargir cet emploi, en assimilant le PE à une brique élémentaire servant à la construction de stratégies d'optimisation plus complexes, afin d'augmenter la précision ou la portée des conditions optimales recherchées.

2. Considérations générales

2.1. Problème d'optimisation

➔ **Cas général**

On définira tout problème d'optimisation P sous la forme générale suivante :

$$P : \begin{cases} \min y(\mathbf{x}) \\ b_{\text{inf},i} \leq x_i \leq b_{\text{sup},i} \end{cases} \quad i \in [1,2,\dots,k]$$

y est la fonction réponse.

\mathbf{x} est le vecteur des coordonnées de tout point intérieur au DE. x_i , le i^{me} élément de \mathbf{x} , désigne la valeur prise par le i^{me} facteur dont les bornes de variation inférieure et supérieure sont respectivement $b_{\text{inf},i}$ et $b_{\text{sup},i}$.

De ce fait, les seuls facteurs considérés dans ce problème d'optimisation sont obligatoirement continus ou discrets. Si des facteurs qualitatifs sont définis, alors le problème P doit être résolu pour chaque modalité de ces facteurs, ou chacune de leurs combinaisons.

$b_{\text{inf},i}$ et $b_{\text{sup},i}$ prennent des valeurs finies. L'optimisation est donc toujours réalisée dans un domaine de volume fini.

Le problème P consiste à rechercher la valeur minimale de la fonction réponse y .

Cela consiste à trouver une valeur particulière \mathbf{x}_{opt} de \mathbf{x} , pour laquelle la réponse y prend sa valeur optimale y_{opt} .

Si le problème d'optimisation s'exprime en terme de maximisation, il faut alors considérer dans P , l'opposé de la fonction réponse originelle, c'est-à-dire $-y(\mathbf{x})$.

➔ **Discretisation de facteurs continus**

Les valeurs des pas (ou précisions) π_j de certains facteurs continus doivent parfois être pris en compte lors de la résolution du problème d'optimisation. Celui-ci peut alors être réécrit de la manière suivante :

$$P : \begin{cases} \min y(\mathbf{x}) \\ b_{\text{inf},i} \leq x_i \leq b_{\text{sup},i} \text{ avec } i \in [1,2,\dots,k] \\ x_j = b_{\text{inf},j} + \alpha_j \cdot \pi_{f,j} \text{ où } \alpha_j = 0,1,2,\dots,N\pi_j - 1 \\ \text{et } j \in [1,2,\dots,k] \end{cases}$$

➔ **Existence de contraintes**

De façon facultative, on peut être amené à compléter la définition du problème d'optimisation, par la prise en compte des fonctions de contrainte. Cela comprend :

- les contraintes en position $g(\mathbf{x})$;
- les contraintes en valeurs atteintes $b(\mathbf{x},\mathbf{y})$.

$$P : \begin{cases} \min y(\mathbf{x}) \\ b_{\text{inf},i} \leq x_i \leq b_{\text{sup},i} \\ g(\mathbf{x}) \leq 0 \\ b(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leq 0 \end{cases} \quad i \in [1,2,\dots,k]$$

Si l'optimum cherché est un maximum (un minimum), \mathbf{x}_1 est un meilleur point que \mathbf{x}_0 , si la valeur y_1 de la réponse en \mathbf{x}_1 est plus grande (plus petite respectivement) que celle y_0 en \mathbf{x}_0 .

Le point de coordonnées \mathbf{x}_{opt} est un *optimum local* de la réponse y s'il n'existe pas de meilleur point \mathbf{x} dans un voisinage de \mathbf{x}_{opt} .

Le point de coordonnées \mathbf{x}_{opt} est un *optimum global* de la réponse y s'il n'existe pas de meilleur point \mathbf{x} dans tout le domaine d'étude possible (DEP).

La méthode des plans d'expériences est utilisée dans ces travaux comme outil de base à des stratégies de résolution de problèmes d'optimisation. Le recours à cette technique implique logiquement d'en exploiter les caractéristiques les plus intéressantes, ainsi que d'en respecter les concepts fondateurs.

Dans ce cadre, l'idée majeure est assurément la volonté d'économiser les efforts nécessaires à l'obtention de résultats fiables et exploitables.

2.2. Economies d'expériences

La méthode des plans d'expériences étant en définitive la réalisation raisonnée de séries d'expériences a priori coûteuses (en temps ou en argent), elle est donc sensée répondre avantageusement au cas particulier des simulations électromagnétiques (expériences virtuelles) requérant souvent des temps de calcul importants.

Cet aspect contraignant des simulations sera toujours pris en compte dans les développements ultérieurs, et en particulier dans l'évaluation des méthodes d'optimisation.

Pour répondre à ce problème, les solutions suivantes peuvent être proposées :

- les plans employés doivent être peu coûteux (nombre d'expériences N faible) ;
- le nombre de plans utilisés par le processus d'optimisation doit être petit ;
- les nouveaux plans doivent si possible s'appuyer sur des expériences déjà réalisées : la récupération de points entre plans doit donc être favorisée.

Chacune des 3 possibilités données ci-dessus est abordée succinctement dans ce qui suit.

2.2.1. Utilisation de plans peu coûteux

Le choix du plan d'expériences à calculer est principalement fonction du type de modèle à déduire, et de façon plus large de l'information à connaître in fine.

Les méthodes décrites dans ce chapitre ont en commun l'utilisation des PE, mais chacune d'elles en exploite les résultats différemment.

Les caractéristiques les plus courantes sont :

- aucun calcul de modèle : seules les valeurs de la réponse y sont considérées ;
- calcul des effets des k facteurs ;
- calcul d'un modèle d'ordre o à k facteurs.

Les plans à utiliser sont différents et adaptés à la tâche à laquelle ils sont destinés.

Ainsi par exemple, il est inutile de calculer un plan factoriel complet à 3 niveaux par facteurs ($N=3^k$) alors que seuls les effets des facteurs sont utilisés. Il suffit alors de lancer au minimum $k+1$ expériences. On pourra donc avoir recours, dans l'ordre, aux plans de Plackett-Burman, à certains plans de Taguchi, ou à des plans factoriels fractionnaires.

2.2.2. Economie de plans

Au cours d'un processus d'optimisation, le nombre de plans utilisés dépend de :

- la convergence rapide de l'algorithme d'optimisation ; le critère d'arrêt de la méthode est atteint rapidement ;
- la taille des plans d'expériences relativement à celle du DE.

La convergence n'est pas entièrement imposée à l'algorithme lui-même : la fonction objectif à optimiser influe sur cette convergence. Il s'agit donc d'un paramètre difficilement maîtrisable.

Considérations générales

Par contre, la taille des plans d'expériences est totalement contrôlée. On voit que plus les dimensions des plans sont grandes, plus rapide est la convergence et dans le même temps, moins les modélisations sont précises. Il faut trouver un compromis entre rapidité de convergence et robustesse de l'algorithme.

2.2.3. Récupération de points entre plans

La *récupération de points* d'expériences consiste à réutiliser certaines expériences d'un plan pour la construction d'un ou plusieurs plans suivants.

Un plan d'expériences permet de modéliser localement la fonction réponse. Réaliser plusieurs PE dans un même domaine d'étude revient donc à calculer des séries de points dans ce volume. Si certains de ces PE sont assez proches, les expériences demandées peuvent alors présenter des modalités quasiment similaires.

Il est donc plus judicieux d'imposer la définition des plans d'expériences à partir de la connaissance des simulations déjà calculées, lorsque cela est possible.

De plus, les opérations de récupération sont facilitées par la nature même des plans d'expériences (annexe 1). La définition des matrices d'expériences étant faite à partir de considérations mathématiques, dans le but de conférer les meilleures propriétés possibles aux modèles à venir, il en ressort que les placements des points d'expériences sont très souvent réguliers, c'est-à-dire exploitant des symétries.

Ces caractéristiques de construction peuvent ainsi être exploitées pour favoriser cette récupération de points.

2.2.3.1 Paramètres caractéristiques

Suivant le type de plan utilisé, les configurations de récupération de points diffèrent. Nous voyons ci-après les principales caractéristiques qui permettent de les comparer.

Par la suite, les récupérations de points se feront en considérant des plans de même type.

Afin d'illustrer les propos futurs, nous prendrons l'exemple des plans de Doehlert de type D-1, pour un nombre de facteurs égal à 2

On appellera *cellule* tout couple de plans où, au minimum, une expérience est partagée.

Les mesures présentées dans ce qui suit viennent donc caractériser une cellule donnée, de manière univoque.

➔ Modes

Pour un même plan d'expériences, il peut exister plusieurs manières de positionner le second plan relativement au premier. On parlera de *modes* différents.

Le premier plan sera appelé *plan de base*, parce qu'il sert de référence à la construction de la cellule.

Dans l'absolu, un mode est défini dès que 2 plans de même type partagent au minimum un point. Cependant, seuls quelques-uns sont dignes d'intérêt.

Concernant les plans de Doehlert, les 2 modes suivants ont été retenus.

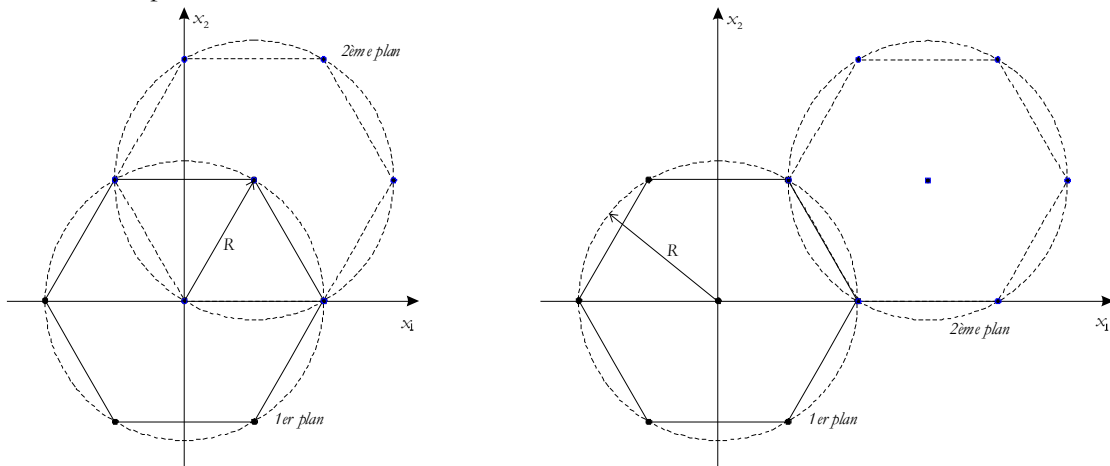


Figure 1 - Plans de Doehlert ($k=2$ - type D-1)
Mode 1 (*gauche*) – Mode 2 (*droite*)

Considérations générales

Dans la première configuration, le deuxième plan emprunte 4 points au premier. Pour cela, le centre de ce plan est un point de la « couronne » du premier.

Pour la seconde configuration, 2 points d'expériences sont partagés. La structure résultante s'apparente alors à un agencement en nid d'abeilles.

➔ Nombre de points récupérés

Dans l'absolu, la procédure de récupération de points est d'autant plus intéressante que le nombre d'expériences partagées est important.

On définit ainsi la variable N_r comme étant le *nombre de points récupérés* d'un plan sur l'autre, dans une cellule. Dans la majorité des cas, N_r est une fonction du nombre de facteurs k .

On considérera dans tous les cas que $1 \leq N_r \leq N$ (N est le nombre d'expériences du plan).

Pour le premier mode des plans de Doehlert de type D-1, on peut montrer que $N_r = 2.k$.

➔ Nombre total de points

Soit N_g le nombre de points de la cellule. On a $N_g = 2.N - N_r$.

Et donc dans tous les cas $1 < N_g/N < 2$.

➔ Volume commun

Très souvent, lorsqu'il y a partage de points, il y a dans le même temps chevauchement des zones d'influence des 2 plans concernés.

On peut alors définir un *volume commun* V_c aux 2 plans.

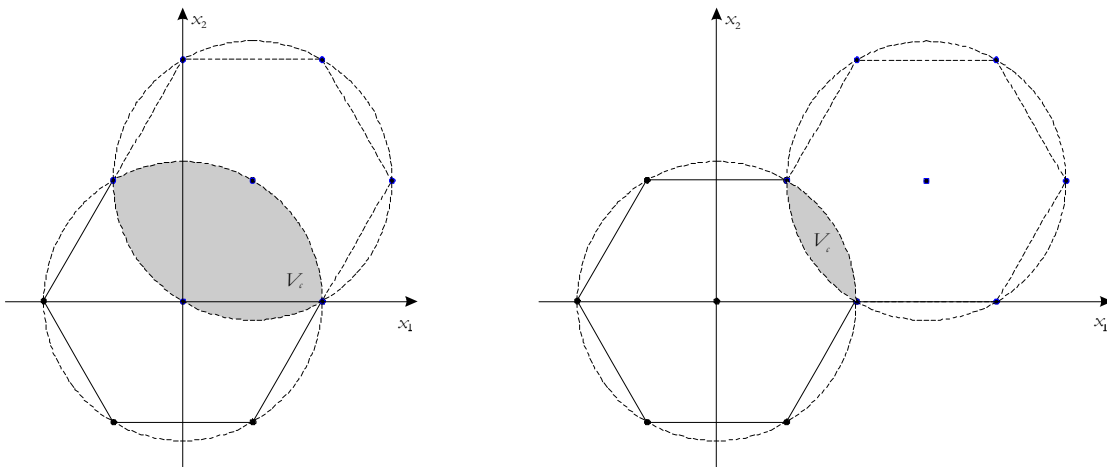


Figure 2 - Volumes communs V_c suivant les 2 modes considérés pour les plans de Doehlert de type D-1
Mode 1 (gauche) – Mode 2 (droite)

La valeur des volumes communs quantifie ainsi la proportion du domaine de chaque plan pour laquelle il existe 2 modélisations différentes de la fonction réponse.

Dans le cadre d'une optimisation par glissements de plans (voir §3.2.), cette grandeur est intéressante puisqu'elle indique indirectement la quantité de volume réellement nouvellement « découverte » (modélisée). Plus V_c est grand, moins la progression de l'algorithme est efficace. Cependant, dans le même temps, il y a de fortes chances pour que le nombre de points récupérés (N_r) soit important. Il y a donc compromis.

Il est à remarquer que certaines configurations font que $V_c=0$.

➔ Volume global

Soit V_g le *volume global* (ou total) couvert par la cellule : $V_g = 2.V_p - V_c$.

V_p est le volume d'un plan. On aura toujours $1 < V_g/V_p \leq 2$.

Considérations générales

➔ Longueur maximale de la cellule

Il est possible de mesurer différemment la progression faite dans la découverte du domaine d'étude, en déterminant la plus grande longueur d_{\max} de la cellule, dans la direction donnée par le placement du second plan relativement au plan de base.

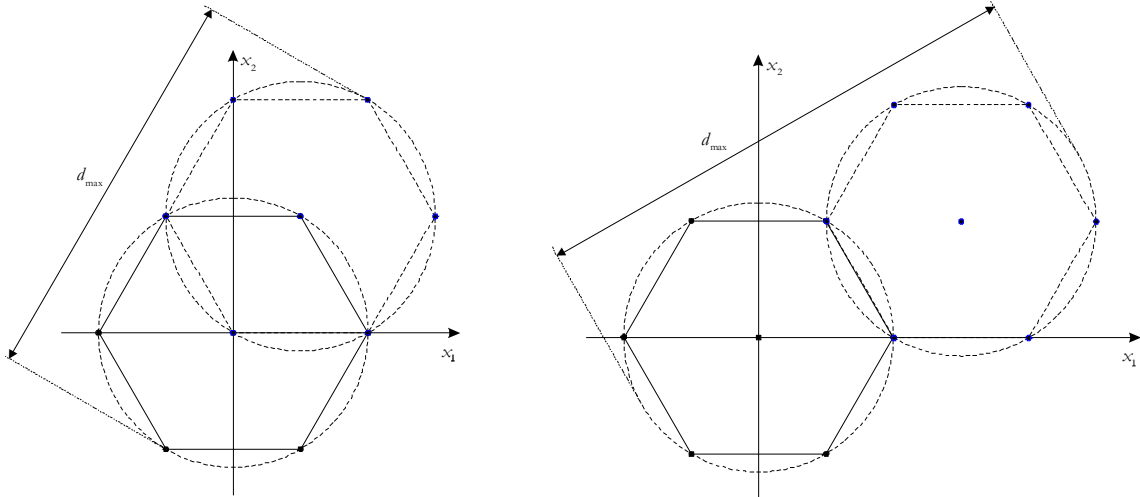


Figure 3 - Dimensions maximales de cellules suivant les 2 modes considérés pour les plans de Doehlert de type D-1
Mode 1 (*gauche*) – Mode 2 (*droite*)

➔ Nombre de configurations possibles

Enfin, il est intéressant de connaître le nombre de façons différentes de placer le second plan relativement au premier, pour un mode déterminé.

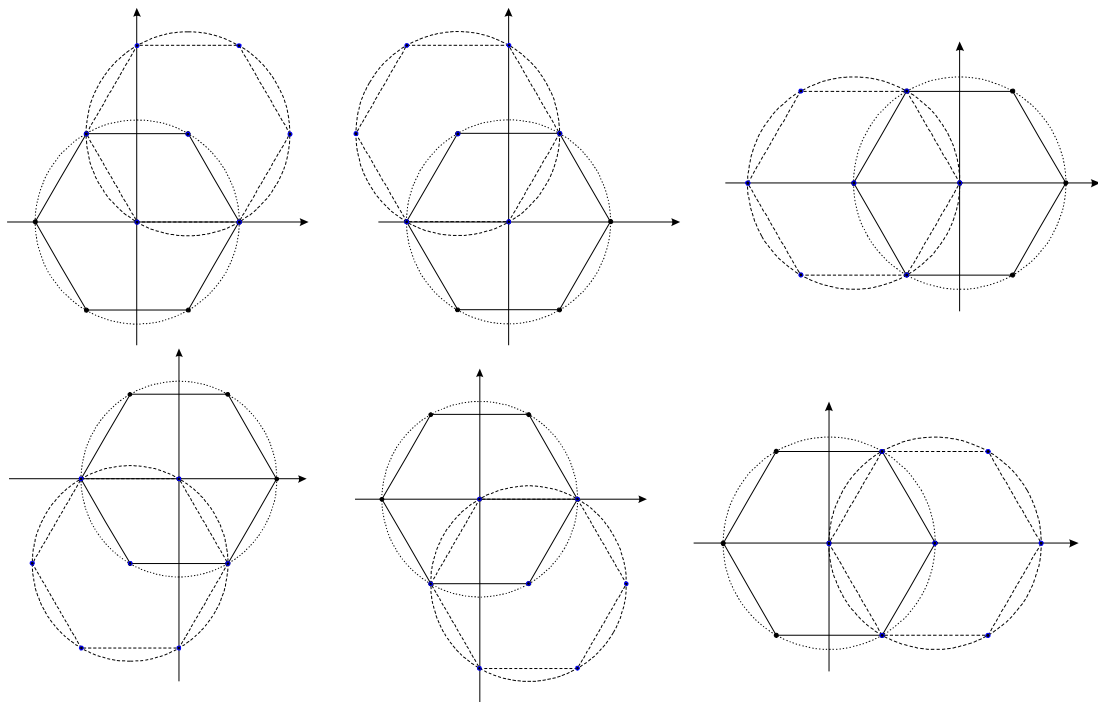


Figure 4 - Différentes configurations de placement du second plan d'une cellule relativement au premier, pour un même mode (mode 1 – plans de Doehlert – type D-1)

Avec les plans de Doehlert, N_{conf} est égal à 6, pour le premier mode. De manière générale, il y a $N_{conf} = N - 1 = k \cdot (1 + k)$ solutions.

Considérations générales

2.2.3.2 Configurations envisagées et Tables

L'annexe 2 répertorie les plus intéressantes configurations de récupération de points entre plans. Pour chaque mode sont données les expressions générales des caractéristiques vues précédemment. Dans la partie Tables, ces mêmes relations sont appliquées aux premières valeurs de k .

3. Méthodes d'optimisation par plans d'expériences

Dans cette partie sont présentées les méthodes d'optimisation utilisant la méthode des plans d'expériences. Elles ont été créées, mises au point et testées dans le cadre des travaux de thèse.

Elles sont classées en trois groupes, bien que ceux-ci ne soient pas distincts les uns des autres :

- les méthodes par glissements de plans ;
- les méthodes par zooms ;
- les méthodes exhaustives.

La présentation des modes de fonctionnement des différentes méthodes d'optimisation se fera dans un domaine d'étude k -dimensionnel.

Certains de ces algorithmes seront employés dans le traitement des exemples présentés au quatrième chapitre.

Toutes ces méthodes seront appliquées à la recherche des conditions optimales d'une même fonction test analytique, présentée au paragraphe 3.1. Les résultats obtenus seront donnés lors de la présentation des algorithmes correspondants.



Pour les méthodes par glissements et par zooms qui fonctionnent par itérations, on utilisera en particulier les expressions *domaine courant* et *nouveau domaine*. Dans ces 2 types de méthodes, c'est l'analyse du modèle calculé sur le domaine courant qui permet de caractériser complètement le nouveau domaine. Lors de l'itération suivante, le nouveau domaine sera pris comme domaine courant, et ainsi de suite.

3.1. Fonction test analytique

On considère une fonction analytique à 2 variables x_1 et x_2 d'expression :

$$f(x_1, x_2) = \frac{2}{1 + [2.(x_1 - 0.6)]^2 + [1.5.(x_2 + 0.4)]^2} + \frac{1.6}{1 + [2.(x_1 + 0.4)]^2 + [1.5.(x_2 - 0.3)]^2}$$

Les 2 facteurs x_1 et x_2 ont les mêmes bornes de variation. Ils prennent leurs valeurs dans l'intervalle $[-1,1]$.

La fonction f est composée de 2 sous-fonctions unimodales, dont les points optimum sont placés à des endroits différents : en $[0.6, -0.4]$ et en $[-0.4, 0.3]$ respectivement.

Elle conserve bien 2 optima mais placés en des coordonnées légèrement différentes du fait de l'addition des valeurs des 2 sous-fonctions entre elles.

Les 2 extremums sont des maxima d'amplitudes différentes. La fonction f est donc multimodale et comprend 1 optimum global et 1 optimum local. Les caractéristiques de ces points sont réunies dans le tableau suivant.

Tableau 1: Coordonnées et valeurs des 2 maxima de la fonction f
(précision de $1e-4$ pour les coordonnées et de $1e-8$ pour les valeurs)

	Coordonnées	Valeur de y
Maximum global	$x_{maxglob} = [0.5772, -0.3840]$	2.26716642
Maximum local	$x_{maxloc} = [-0.3627, 0.2739]$	1.93782563

Aucune contrainte n'est considérée dans ce problème.

Cette fonction constitue un test sévère pour les méthodes d'optimisation. De plus, elle permet d'illustrer facilement dans un espace de dimension 2, les principes des algorithmes mis au point, pour un nombre de dimensions k quelconque.

Les figures suivantes illustrent les variations de la fonction f .

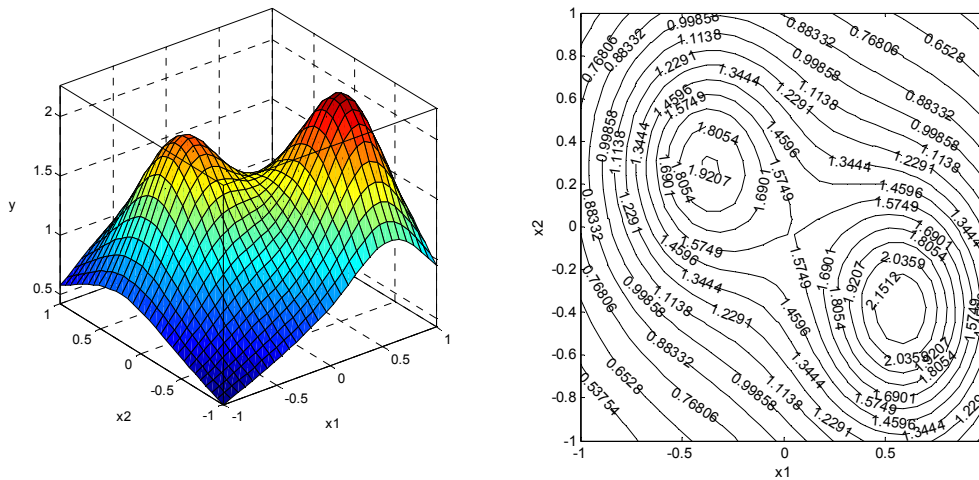


Figure 5 - Fonction test analytique pour l'évaluation des méthodes d'optimisation par PE

3.2. Méthodes par glissements

Les plans utilisés par les méthodes de ce type sont de petite taille par rapport au domaine d'étude. A chaque itération de ces algorithmes, un plan d'expériences est réalisé sur une zone différente de DEP. Le placement de chacun des plans est déduit des informations obtenues à l'itération précédente. Les plans employés sont identiques entre eux (même type et même taille).

Trois méthodes seront présentées ici. Les 2 premières calculent un modèle à chaque itération, alors que la troisième s'en dispense.

Dans les 2 premiers cas, le calcul du modèle permet de déduire une *direction de recherche*, c'est-à-dire la *direction de meilleures valeurs*, à partir de laquelle est déduite la position du plan suivant.

Le troisième algorithme ne considère que les valeurs de la réponse aux points d'expériences : le meilleur point d'un plan devient le centre du plan réalisé à l'itération suivante.

On observe donc un *glissement* des zones modélisées dans le DEP.

Les distances parcourues à chaque itération sont constantes. Elles sont déterminées par les dimensions des plans utilisés, invariantes au cours du déroulement de l'algorithme.

3.2.1. Utilisation de plans du 1^{er} ordre

3.2.1.1 Description

➔ Principe général

L'idée principale de cet algorithme est de calculer les droites de meilleures valeurs à partir d'une estimation du gradient de la fonction réponse, sur le domaine courant.

Il s'agit donc en quelque sorte d'un algorithme de Plus Grande Pente. Cependant, la MPE permet en plus de déduire une modélisation locale de la fonction réponse.

Le principe de cette méthode peut être trouvé dans [Box 87].

➔ Plans et modèles utilisés

Cet algorithme utilise des modèles du premier degré définis chacun par $v(k,1)=k+1$ coefficients. Ils s'écrivent de la manière suivante :

$$y_{\text{mod}} = b_0 + \mathbf{x}' \cdot \mathbf{b}$$

On notera qu'une mesure « traditionnelle » du gradient d'une fonction en un point nécessite également $k+1$ expériences : ce point de référence puis k autres, chacun dans une des k dimensions de l'espace, à une distance δx_i du point de référence ($i = 1, 2, \dots, k$).

Il a été vu que le vecteur \mathbf{b} indique la direction de plus grande augmentation du modèle $y_{\text{mod}}(\mathbf{x})$. Cette grandeur va permettre de déduire la direction de glissement pour l'itération suivante.

Logiquement, le vecteur $-\mathbf{b}$ donne la direction de plus grande diminution des valeurs de $y_{\text{mod}}(\mathbf{x})$.

Les plans à utiliser doivent comprendre au minimum $k+1$ expériences, ce qui est le cas de tous les PE. Etant donné que seuls les effets principaux (et le terme constant) sont calculés, les plans les plus économiques en nombre d'expériences doivent être privilégiés.

Ainsi, le coût de la méthode pour chaque itération peut être particulièrement faible par l'utilisation de plans de Taguchi ou de plans factoriels fractionnaires.

Ces derniers doivent être toutefois choisis prudemment. Il faut en effet veiller à ce que les effets des facteurs principaux (qui représentent les valeurs utiles) ne soient pas aliasés avec des interactions dont on peut penser qu'elles peuvent être influentes, quelle que soit la zone considérée du DEP. Ce choix s'avère être assez délicat, dans la mesure où l'évolution des effets des interactions dans tout le domaine est généralement inconnue. Le recours à des plans de screening de résolution élevée (supérieure à IV) minimise alors les risques.

➔ *Position du plan initial*

La position du premier plan réalisé est directement déterminée par les coordonnées \mathbf{x}_0 de son centre. Tous les points du plan initial doivent être réalisables.

Son éloignement ou sa proximité avec le point optimum en fait un paramètre important quant au coût total de l'optimisation par cet algorithme. Cependant, dans la majorité des cas, l'emplacement des conditions optimales ne peut être deviné, conduisant alors à placer \mathbf{x}_0 au centre du domaine d'étude possible.

➔ *Taille des plans utilisés*

Bien évidemment, la taille optimale des plans pourrait être déduite de la connaissance des variations de la fonction réponse sur l'ensemble du DE, ce qui n'est pratiquement jamais possible en optimisation directe.

Ainsi la valeur de ce paramètre doit être fixée arbitrairement. Par défaut, on fait en sorte que les dimensions du domaine couvert par les plans sur chacune des k dimensions représente un pourcentage fixe des dimensions correspondantes du domaine d'étude. Pour une valeur de 10%, cela revient à prendre $a=0.2$ dans un espace centré réduit (où les valeurs des k facteurs varient entre -1 et 1).

Plus les dimensions de l'espace couvert par le plan sont petites, plus la vitesse de convergence de l'algorithme est faible et plus le nombre de points nécessaires est élevé.

Qui plus est, si l'algorithme est terminé par le recoupement de deux chemins optimaux (ce qui est généralement le cas), la taille des plans ne joue pas dans la précision de la localisation de l'optimum (\mathbf{x}_{opt}). Dans ce cas, il n'y a pas intérêt à prendre des plans très petits.

Par contre, si les conditions optimales sont placées près de la frontière du DEP, recourir à des plans de petite taille permettra d'approcher plus sûrement le point optimum (paragraphe « Condition d'arrêt de l'algorithme »).

➔ *Stratégies de glissement*

L'inconnue restante réside dans la manière de placer le nouveau plan relativement au premier.

Soit le plan initial grâce auquel est calculé un modèle du premier ordre. La valeur de \mathbf{b} est alors connue.

On définit alors la droite D de coefficient directeur \mathbf{b} et passant par \mathbf{x}_{c1} le centre du premier plan. Son équation paramétrique est :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{c1} + \mathbf{b}.t \quad t \in \mathbf{R}$$

La position du plan glissé, relativement au plan initial, est déterminé comme suit :

Méthodes d'optimisation par plans d'expériences

- la droite passant par les centres des 2 plans a son coefficient directeur égal à \mathbf{b} ; il doit donc exister une valeur particulière t' pour laquelle $\mathbf{x}_{i,2} = \mathbf{x}_{i,1} + \mathbf{b}.t'$ ($\mathbf{x}_{i,2}$ est le centre du second plan);
- les 2 plans définissent des domaines d'influence mitoyens et jointifs (non intersectés);
- t' doit être un réel positif pour un déplacement vers le maximum, et négatif pour se diriger vers le minimum.

Graphiquement, pour un espace avec $k=2$, cette option peut être représentée comme suit :

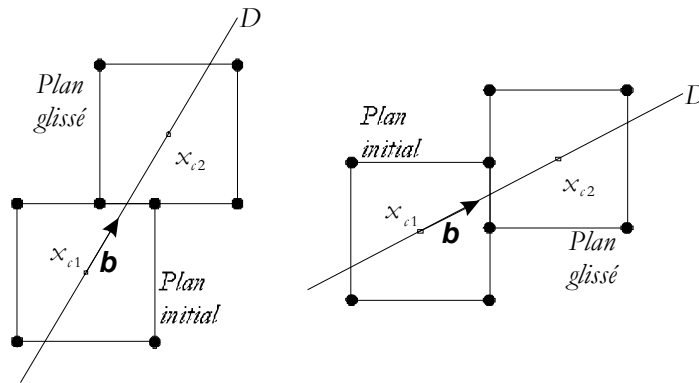


Figure 6 - Stratégie de glissement de plans du premier ordre ($k=2$ - plans factoriels complet $N_{vi}=2$)

On peut être amené à rencontrer des successions de plans où la vitesse de convergence est faible relativement au nombre d'expériences réalisées. L'exemple donné ci-après correspond à l'optimisation autour d'une ligne de crête : les plans 1, 3 et 5 sont placés d'un côté de cette ligne, les plans 2 et 4 de l'autre :

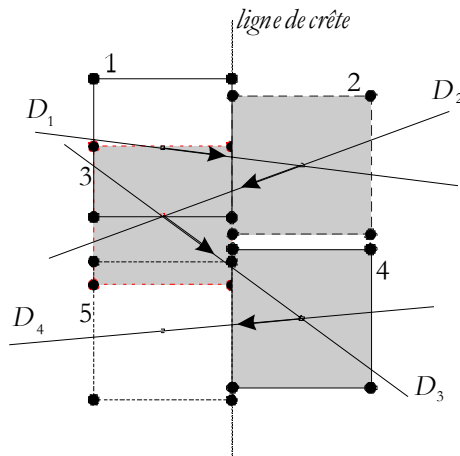


Figure 7 - Exemple de convergence lente de l'algorithme d'optimisation par glissements de plans

La stratégie de glissement présentée précédemment ne constitue pas la seule alternative. Il est également possible, par exemple, d'adopter la stratégie représentée schématiquement ci-après.

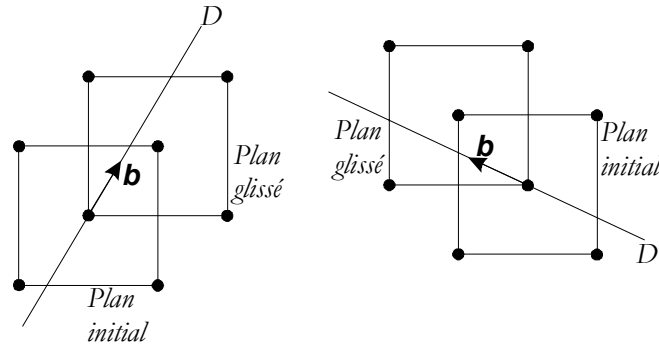


Figure 8 - Autre stratégie de glissements de plans du premier ordre

On notera enfin que la stratégie de glissement représentée ci-dessous fait diverger l'algorithme pour certaines fonctions objectif.

Ce cas était pourtant intéressant du fait de la récupération effective de points entre 2 plans successifs.

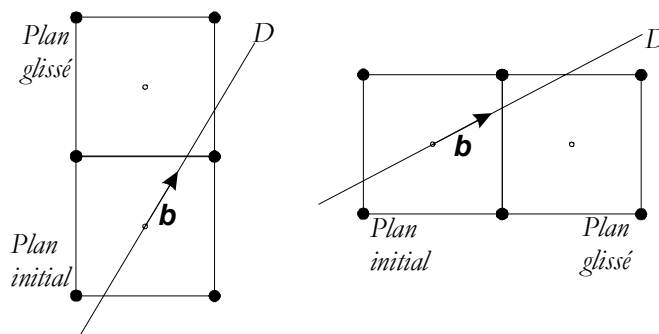


Figure 9 - Stratégie de glissement de plans impliquant une divergence de l'algorithme dans certaines configurations

➔ Condition d'arrêt de l'algorithme

L'évolution de la fonction réponse vers les conditions optimales est mesurée en mémorisant, à chaque itération, les valeurs des modèles du premier ordre au centre des domaines.

L'algorithme juge qu'il a atteint l'optimum dès qu'il trouve une valeur centrale de y_{mod} moins bonne que celle qu'il avait calculée à l'itération précédente :

$$\frac{y_{\text{mod},i} - y_{\text{mod},i-1}}{y_{\text{mod},i-1} - y_{\text{mod},i-2}} < 0$$

Avec $y_{\text{mod},i}$ la valeur prise par le modèle au centre du domaine lors de la $i^{\text{ème}}$ itération de l'algorithme.

Dans la majorité des cas, cette condition d'arrêt ne permet pas d'hériter d'une valeur précise pour x_{opt} , ou même pour y_{opt} . C'est pourquoi on applique très souvent la technique du recouplement de deux chemins optimaux calculés sur deux domaines décalés, afin de gagner en précision sur x_{opt} (cf. Annexe 3, §3.2.2.).

Cet algorithme s'arrête également dès qu'un plan possède au moins une expérience hors du DEP.

3.2.1.2 Résumé des caractéristiques

➔ Caractéristiques générales

- Algorithme itératif ;
- Optimisation sur facteurs continus ou discrets ;
- Evolution possible dans un domaine d'étude contraint ;
- S'arrête dès l'impossibilité de réaliser un plan entier (présence de contraintes par exemple) ;

Méthodes d'optimisation par plans d'expériences

- S'arrête dès l'éloignement des conditions optimales.

➔ Paramètres ajustables

- Position du point d'origine x_0 ;
- Type et caractéristiques du plan ;
- Taille du plan d'expériences utilisé ;
- Stratégie de glissement.

➔ Points forts

- Modélisation partielle de la fonction réponse sur le parcours d'optimisation ;
- Nombre d'expériences nécessaires limité, pour chaque itération ;
- Possibilité d'utiliser des plans économiques (factoriels fractionnaires par exemple).

➔ Points faibles

- Récupération de points entre plans successifs faible ou impossible à réaliser ;
- Difficulté pour gérer les optima près ou sur les frontières du domaine d'étude possible ;
- L'optimum trouvé est local.

➔ Remarques

Cette méthode est construite sur une idée d'économie d'efforts, par rapport au nombre d'expériences à réaliser. Cet aspect se caractérise naturellement par le petit nombre et la simplicité des actions réalisées par l'algorithme. Ainsi, sa robustesse en est que plus grande.

3.2.1.3 Algorithme

- (1) > Définir un point d'origine $x_0 = [x_{01} \ x_{02} \ \dots \ x_{0k}]$ appartenant au domaine d'étude possible ;
- (2) > Réaliser un plan d'expériences (à au minimum $v(k,1)$ expériences) de centre x_0 ;
 - ➔ Si il existe au moins une expérience hors du domaine d'étude possible ;
 - Renvoi du meilleur point donné par le modèle du plan précédent ;
 - Fin de l'algorithme ;
- (3) > Calculer le modèle polynomial du 1^{er} degré associé ; le vecteur b représente alors le vecteur directeur de la droite D de meilleures valeurs (pour la réponse) ;
 - ➔ Si le modèle possède une valeur maximale (ou minimale) plus petite (ou plus grande respectivement) que celle donnée par le modèle du plan précédent ;
 - Renvoi du meilleur point donné par le modèle du plan précédent ;
 - Fin de l'algorithme ;
 - ➔ Si le modèle possède une valeur maximale (ou minimale) plus grande (ou plus petite respectivement) que celle donnée par le modèle du plan précédent ;
 - Définir un nouveau point x_0 placé sur D , dans le sens indiqué par b afin qu'un nouveau plan d'expériences de centre x_0 ait une frontière commune avec le plan précédemment réalisé ;
 - Recommencer en (2).

3.2.1.4 Application sur la fonction test

Tableau 2 - Résultats numériques de l'optimisation de la fonction test

	Paramètres de l'algorithme	Info. optimisation		Meilleurs points	
		Nb pts	Nb plans	Coordonnées	Réponse
1	Pt initial : [0, 0] Taille plans : 10%	21	3+2	[-0.34794, 0.25697]	1.9357
2	Pt initial : [0.5, 0.5] Taille plans : 10%	27	4+2	[0.5705, -0.37266]	2.26628

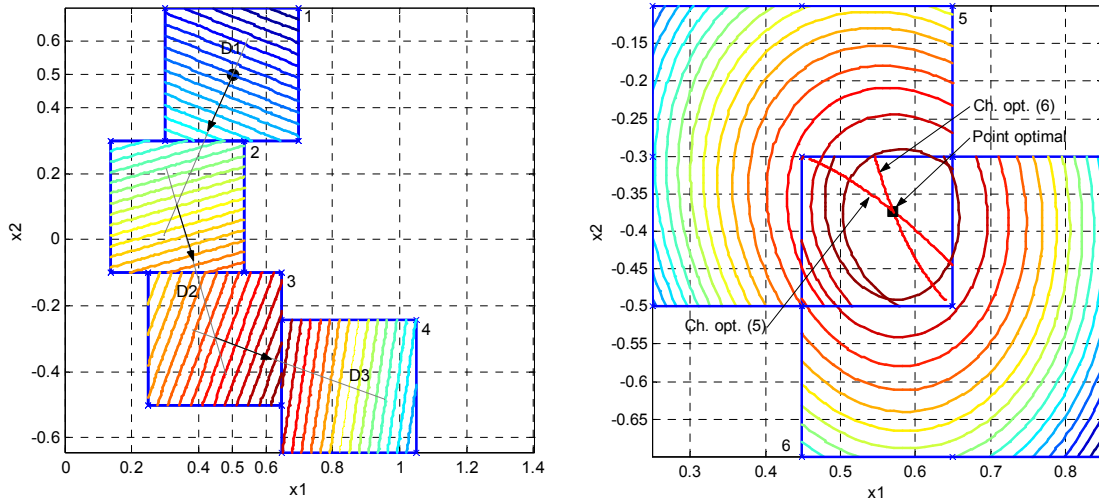


Figure 10 - Glissements de plans du premier ordre (gauche)
Recoupement de 2 chemins optimaux (droite)

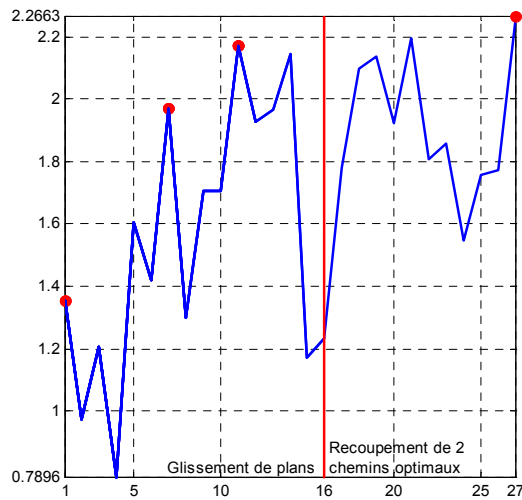


Figure 11 - Valeurs de la réponse aux points d'expériences
au cours du déroulement de l'algorithme

- Le tableau précédent donne les résultats numériques de 2 lancements distincts de la méthode d'optimisation par glissements de plans du premier ordre. Ces 2 optimisations se distinguent par les coordonnées du point initial, ainsi que par celles du point optimal trouvé. Lorsque le point initial est en $[0, 0]$, l'extremum atteint est le maximum local, alors que l'optimum global est trouvé quand \mathbf{x}_0 est placé en $[0.5, 0.5]$. Cela démontre l'extrême dépendance de l'algorithme au choix du point initial.
- Les figures données ci-dessus se rapportent au cas où $\mathbf{x}_0 = [0.5, 0.5]$.
- On peut isoler 2 étapes distinctes : les glissements de plans vers les meilleures valeurs de la réponse, et le recoupement final de 2 chemins optimaux.
- La première étape nécessite 16 expériences, réparties uniformément entre 4 plans factoriels complets 2^k ($k=2$). Il n'y a aucune récupération de points entre plans. Lors du passage du troisième au quatrième plan, une diminution de la valeur de la réponse est constatée (par comparaison des valeurs calculées au centre des domaines). Afin de donner une estimation plus précise de la position du point optimal, on effectue un recoupement de 2 chemins optimaux.
- Cette dernière étape voit l'utilisation de 2 plans factoriels complets à 3 niveaux par facteur. Le premier de ces plans (portant le numéro 5) est calculé sur le même domaine que le plan numéro 4. Ce plan 3^k récupère ainsi $2^k=4$ points déjà calculés. Le second plan 3^k est alors placé afin de récupérer 2^k expériences du plan n°5 (mode 1 pour plans factoriels complets 3 niveaux). En tout et pour tout, cette seconde étape n'a demandé que 10 nouvelles expériences, pour le calcul de 2 modèles du second degré. Les 2 chemins optimaux respectifs en sont alors déduits, et leur intersection donne une estimation intéressante de la localisation de \mathbf{x}_{opt} . Une dernière expérience est alors réalisée en ce point.
- Pour cette dernière étape, il aurait été envisageable d'employer des plans de Doehlert, par exemple. Dans ce cas, il n'aurait plus été possible de récupérer les 4 points du plan n°4. Cependant, les plans de Doehlert nécessitent moins d'expériences, et leur premier mode de récupération de points est plus intéressant. Ainsi, toujours pour le calcul de 2 modèles du second ordre, il aurait fallu également $N_g=10$ expériences.

3.2.2. Utilisation de plans du 2nd ordre

3.2.2.1 Description

➔ *Principe général*

Le principe de fonctionnement est identique à celui adopté par l'algorithme précédent.

Les mêmes remarques doivent donc être apportées concernant la détermination du point \mathbf{x}_0 , centre du premier plan ainsi que sur la taille des plans utilisés.

Les principales différences résident en définitive dans les types de plans utilisés et dans la détermination des directions et sens de glissement.

En effet, c'est l'analyse canonique appliquée aux modèles du second degré qui détermine les directions et sens des droites de meilleures valeurs.

➔ *Plans et modèles utilisés*

Les plans utilisés permettent le calcul de modèles du second ordre. Il en existe toute une panoplie. Leur choix doit être fait en fonction :

- du nombre d'expériences à réaliser
L'algorithme est une succession de plans qui nécessitent chacun au minimum $\nu(k,2)$ expériences. Leur nombre sera d'autant plus élevé que leur taille est petite.
- des possibilités offertes pour la récupération des expériences entre plans
Selon tel ou tel type de plan d'expériences, il est plus ou moins facile et intéressant de bénéficier de la récupération de points d'expériences entre plans successifs. Cet aspect est traité dans l'annexe 2, où les principales configurations sont répertoriées.

➔ *Stratégies de glissement*

La direction et le sens pris pour l'opération de glissement de plan sont déduits de l'analyse canonique. Celle-ci nous donne indirectement la direction de recherche, qui joue ici le même rôle que le vecteur \mathbf{b} pour l'algorithme précédent (paragraphe « Directions de meilleures valeurs » de l'annexe 3).

A partir de cette information, il s'agit de disposer au mieux le plan glissé de l'itération suivante de l'algorithme.

Cette opération se déduit des possibilités offertes par les modes de récupération de points propres au plan choisi (cf. annexe 2) : elle est menée de façon à maximiser le nombre de points récupérés, et également, à disposer d'une grille finale de points la plus uniforme possible, dans la perspective d'interpolations futures.

➔ *Condition d'arrêt de l'algorithme*

A chaque itération, l'analyse canonique est appliquée. Si la modélisation locale de la fonction réponse décrit effectivement l'optimum recherché (maximum ou minimum), l'algorithme cherche à affiner la localisation des conditions optimales, en utilisant la technique du recouplement des chemins optimaux (paragraphe 3.2.2. de l'annexe 3). Ce cas de figure ne peut être rencontré que si l'optimum est intérieur au DEP.

Dans le cas contraire, l'optimum donné par la modélisation est un point de la frontière. De la même façon que pour l'algorithme précédent, cette méthode s'arrêtera dès qu'un plan ne pourra être calculé entièrement. Les conditions optimales seront donc au mieux approchées par le dernier plan valide.

3.2.2.2 Résumé des caractéristiques

➔ *Caractéristiques générales*

- Algorithme itératif ;
- Optimisation sur facteurs continus ou discrets ;
- Evolution possible dans un domaine d'étude contraint ;
- S'arrête dès l'impossibilité de réaliser un plan (présence de contraintes par exemple) ;
- S'arrête après l'application du recouplement de 2 chemins optimaux.

Méthodes d'optimisation par plans d'expériences

➔ Paramètres ajustables

- Position du point d'origine x_0 ;
- Type de plan utilisé et caractéristiques du plan ;
- Taille du plan d'expériences utilisé ;
- Stratégie de glissement.

➔ Points forts

- Modélisation partielle de la fonction réponse sur le parcours d'optimisation ;
- Récupération importante de points entre plans successifs possible, par utilisation de plans appropriés.

➔ Points faibles

- Difficulté pour gérer les optima près ou sur les frontières du domaine d'étude possible ;
- L'optimum trouvé est local.

3.2.2.3 Algorithme

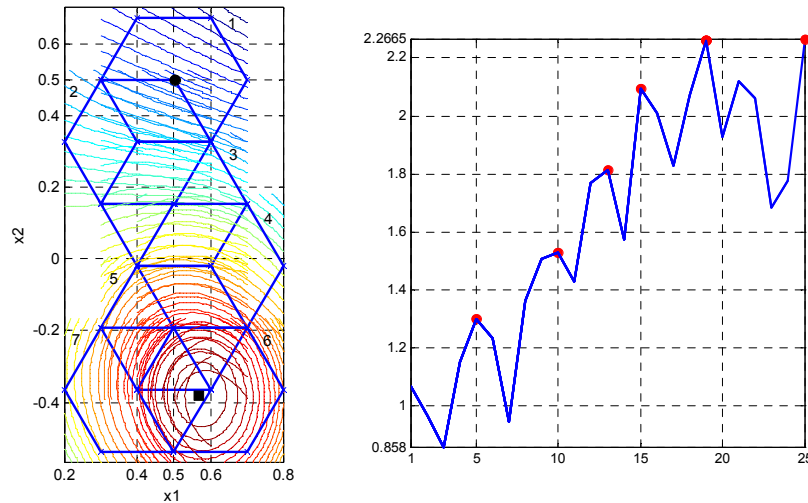
- (1) > Définir un point d'origine $x_0 = [x_{01} \ x_{02} \ \dots \ x_{0k}]$ appartenant au domaine d'étude possible ;
- (2) > Réaliser un plan d'expériences (à au minimum $v(k,2)$ expériences) de centre x_0 ;
 - ➔ Si il existe au moins une expérience hors du domaine d'étude possible ;
 - Renvoi du meilleur point donné par le modèle du plan précédent ;
 - Fin de l'algorithme ;
- (3) > Calculer le modèle polynomial du 2nd degré associé ;
- (4) > Réaliser l'analyse canonique ; en déduire :
 - la droite D de meilleures valeurs (et le sens correspondant) ;
 - le point optimum du modèle ;
 - ➔ Si le modèle possède une valeur maximale (ou minimale) plus petite (ou plus grande respectivement) que celle donnée par le modèle du plan précédent ;
 - Renvoi du meilleur point donné par le modèle du plan précédent ;
 - Fin de l'algorithme ;
 - ➔ Si le modèle possède une valeur maximale (ou minimale) plus grande (ou plus petite respectivement) que celle donnée par le modèle du plan précédent ;
 - Définir un nouveau point x_0 placé sur D , dans le meilleur sens afin qu'un nouveau plan d'expériences de centre x_0 partage le plus d'expériences avec le plan précédemment réalisé ;
 - Recommencer en (2).

3.2.2.4 Application sur la fonction test

Tableau 3 - Résultats numériques de l'optimisation de la fonction test

	Paramètres de l'algorithme	Info. optimisation		Meilleurs points	
		Nb pts	Nb plans	Coordonnées	Réponse
1	Pt initial : [0, 0] Taille plans : 10%	18	5	[-0.39175, 0.3367]	1.91965
2	Pt initial : [0.5, 0.5] Taille plans : 10%	25	7	[0.56824, -0.38157]	2.26654

Méthodes d'optimisation par plans d'expériences



- De la même façon que pour l'algorithme utilisant les plans du premier ordre, la méthode présentée ici est fortement dépendante du point initial. Cela est illustré par le tableau précédent qui donne les résultats de 2 utilisations de l'algorithme, avec des points initiaux différents ($[0, 0]$ et $[0.5, 0.5]$ respectivement).
- Les figures ci-dessus illustrent le déroulement de l'optimisation lorsque $x_0 = [0.5, 0.5]$.
- Les plans utilisés sont tous du type Doehlert D-1. Lorsque $k=2$, il est commode de les représenter par des hexagones dont les sommets correspondent aux points d'expériences. Chaque plan demande 7 expériences (un point est réalisé au centre).
- On peut ici encore identifier 2 phases : glissements de plans vers les meilleures valeurs de la réponse, et recoupement de 2 chemins optimaux (plans 6 et 7).
- La première étape demande 6 plans. Grâce aux récupérations de points, ces 6 plans n'ont été calculés qu'avec 22 points (au lieu de $6 \times 7 = 42$). Cette procédure est donc particulièrement économique ; en effet, il a été possible ici de calculer 6 modèles du second ordre avec 22 expériences, alors que l'algorithme précédent (3.2.1.) demandait 16 expériences pour déduire 4 modèles du premier ordre.
- Le plan n°6 a donné le jour à un modèle décrivant un maximum (c'est-à-dire le type d'optimum recherché) pour lequel le point stationnaire S est intérieur au domaine d'étude en cours. Les conditions optimales sont donc atteintes ; afin de les préciser, la technique de recoupement de 2 chemins optimaux est entreprise.
- Le premier chemin optimal est calculé sur le plan n°6, et le second déduit de la réalisation d'un septième plan décalé. Le placement de ce dernier est tel qu'il récupère 5 expériences des plans 5 et 6 à la fois. Une dernière expérience est calculée aux coordonnées indiquées par l'intersection des 2 chemins optimaux.

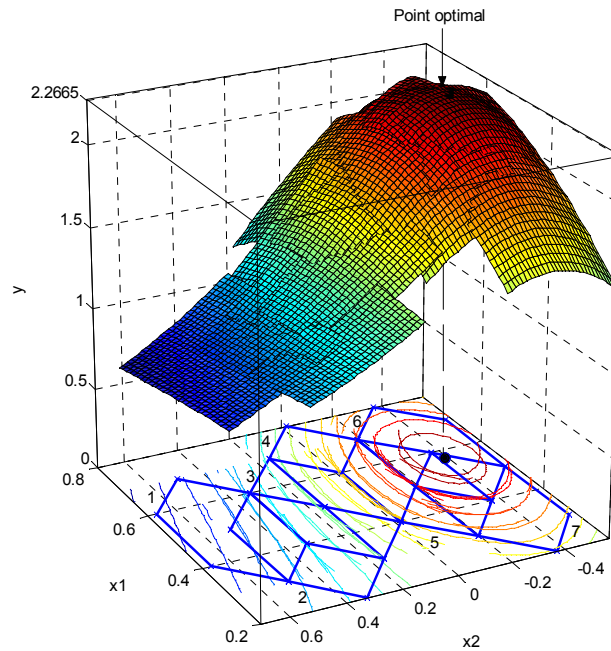


Figure 13 - Représentation spatiale des modèles du second degré utilisés au cours du processus d'optimisation

- L'illustration précédente est équivalente à la Figure 12. Cependant, elle a l'avantage de donner un aperçu de la modélisation partielle et par morceaux de la fonction objectif, ayant servi pour la recherche des conditions optimales.

3.2.3. Glissements sans calcul de modèles

3.2.3.1 Description

➔ Principe général

Pour cet algorithme, les facteurs sont supposés être discrets, c'est-à-dire prendre un ensemble fini de valeurs.

On définit une grille (régulière de préférence) de points, qui va servir de support au processus d'optimisation. Très souvent, celle-ci est fixée par les N_{vi} valeurs intermédiaires des k facteurs.

L'algorithme commence en un point P_0 de coordonnées \mathbf{x}_0 appartenant obligatoirement au DEP.

A chaque étape, la valeur des points autour du point d'origine est étudiée. Le point possédant la meilleure valeur de réponse (au sens de l'optimalité désirée) est alors considéré comme nouveau point d'origine, et l'algorithme recommence.

Aucun modèle mathématique de la réponse n'est calculé.

➔ Valeur du pas

On introduit un paramètre important : le *pas*. Considérer un pas de valeur s revient à ne retenir que les points distants de s points de la grille, pour une direction donnée, par rapport à P_0 .

La Figure 14 illustre cette notion, en faisant apparaître dans le même temps la différence entre points axiaux et points diagonaux.

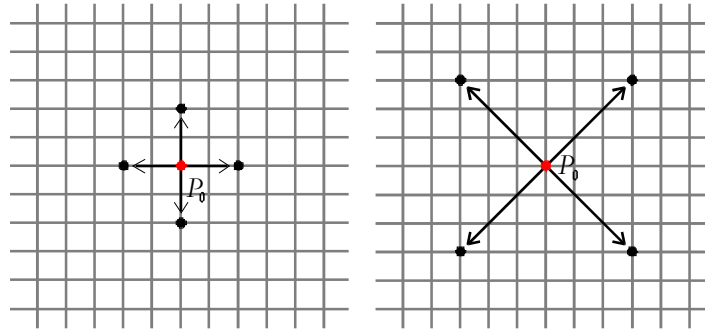


Figure 14 - Points voisins du point de référence P_0

Gauche : Points axiaux – $pas=2$

Droite : Points diagonaux – $pas=3$

Quelque soit la valeur de k , le point d'origine P_0 et la valeur du pas, il y a :

- 2^k points diagonaux ;
- $2 \cdot k$ points axiaux.

Dans un premier temps, l'algorithme réalise les expériences aux 2^k points diagonaux du point d'origine P_0 courant. Cela est équivalent à calculer un plan factoriel complet sur le domaine de dimensions imposées par le paramètre pas .

S'il existe un point diagonal dont la réponse y_0 est meilleure que celle en P_0 , ce point devient l'origine pour l'itération suivante.

Dans le cas contraire, l'algorithme réalise les expériences au $2 \cdot k$ points axiaux.

S'il existe un point axial dont la réponse est meilleure que celle en P_0 (notons la y_0), ce point devient l'origine pour l'itération suivante. Si tel n'est toujours pas le cas, la valeur courante du pas est décrémentée de 1, s'il est possible de le faire, dans la mesure où le pas vaut au minimum 1.

Toutes les opérations précédentes sont alors recommencées.

➔ **Prise en compte des contraintes**

Les contraintes sont prises en compte lors de la détermination des points à réaliser à proximité de P_0 .

Il est en effet facile de connaître les points axiaux ou diagonaux exclus par les contraintes, c'est-à-dire les expériences irréalisables.

➔ **Condition d'arrêt de l'algorithme**

L'algorithme s'arrête lorsque le pas est unitaire et qu'il n'existe aucun point (diagonal et axial) voisin de P_0 dont la réponse est meilleure que y_0 .

3.2.3.2 Résumé des caractéristiques

➔ **Caractéristiques générales**

- Algorithme itératif et récursif ;
- Optimisation sur facteurs discrets ;
- Evolution dans un domaine d'étude contraint ;
- S'arrête lorsque aucun meilleur point ne peut être trouvé autour de P_0 avec un pas unitaire.

➔ **Paramètres ajustables**

- Position du point d'origine x_0 ;
- Valeur du pas de considération des points voisins.

Indirectement, la densité de la grille des points joue un rôle très important dans les performances de l'algorithme.

➔ **Points forts**

- Simplicité des calculs nécessaires, et donc robustesse de l'algorithme.

Méthodes d'optimisation par plans d'expériences

➔ **Points faibles**

- L'optimum trouvé est local ;
- Le nombre nécessaire d'expériences peut devenir important, pour un grand nombre de facteurs.

➔ **Remarques**

Le pas permet de gérer la vitesse de l'algorithme, c'est-à-dire sa rapidité de déplacement dans le DEP, pour la recherche du point optimum.

Plus le pas est grand, plus cet aspect est renforcé. Cependant, dans le même temps, plus la probabilité est grande de passer à côté des conditions optimales.

Il s'agit donc d'un compromis, qui est toutefois relativisé par le fait que la valeur du pas soit adaptée en fonction des conditions rencontrées.

3.2.3.3 Algorithme

- (1) > Définir un point d'origine $x_0 = [x_{01} \ x_{02} \ \dots \ x_{0k}]$ appartenant à la grille, dans le domaine courant ;
- (2) > Initialiser la valeur de *pas* ($pas \geq 1$) ;
Pour le domaine courant :
- (3) > Réaliser les expériences sur les points de la grille, diagonaux par rapport à x_0 , et distants de *pas* points de x_0 ; il y en a 2^k ;
 - ➔ S'il existe un point meilleur que x_0
 - (4) > Affecter les coordonnées de ce point à x_0 ;
 - (5) > Recommencer en (3) ;
 - ➔ S'il n'existe pas de meilleur point que x_0
 - (6) > Réaliser les expériences sur les points de la grille, axiaux par rapport à x_0 , et distants de *pas* points de x_0 ; il y en a $2.k$;
 - ➔ S'il existe un point meilleur que x_0
 - (7) > Affecter les coordonnées de ce point à x_0 ;
 - (8) > Recommencer en (3) ;
 - ➔ S'il n'existe pas de meilleur point que x_0
 - ➔ Si $pas > 1$
 - (9) > Décrémenter la valeur de *pas* ($pas=pas-1$)
 - (10) > Recommencer en (3) ;
 - ➔ S'il n'existe pas de meilleur point que x_0
 - ➔ Si $pas = 1$
 - (11) > Fin de l'algorithme.

3.2.3.4 Application à la fonction test

Tableau 4 - Résultats numériques de l'optimisation de la fonction test

	Paramètres de l'algorithme	Info. optimisation		Meilleurs points	
		Nb pts	Nb plans	Coordonnées	Réponse
1	Grille facteurs : [41, 41] Pt initial : [0, 0]	29	6	[-0.35, 0.25]	1.93506
2	Grille facteurs : [41, 41] Pt initial : [0.5, 0.5]	41	13	[0.6, -0.4]	2.26219

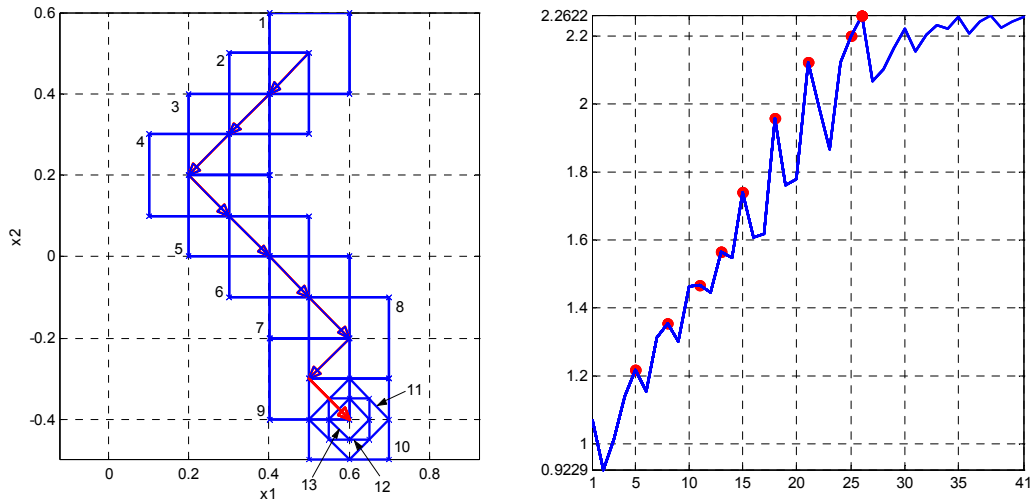


Figure 15 - Disposition des plans dans le DE (gauche)
Valeurs de la réponses aux points d'expériences (droite)

- A l'instar des méthodes d'optimisation par glissements de plans, cet algorithme est également tributaire d'un choix judicieux du point initial. Ainsi, le point $\mathbf{x}_0=[0, 0]$ induit ici aussi en erreur, alors que l'optimum global est trouvé en partant de $[0.5, 0.5]$.
- Les résultats numériques ainsi que les figures montrent le processus d'optimisation lorsque $\mathbf{x}_0=[0.5, 0.5]$.
- L'ensemble des points utilisé comme support par l'algorithme est une grille 41×41 (chaque facteur prend 41 valeurs régulièrement espacées entre ses bornes de variation). Le pas considéré au début de l'algorithme vaut 2.
- Cette approche a nécessité la réalisation de 13 plans, c'est-à-dire 41 points. Les plans 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 et 12 sont du type factoriel complet à 2 niveaux par facteur, avec un point au centre. Les plans 11 et 13 sont la réalisation de points axiaux à un même point de référence, avec un pas valant respectivement 2 et 1.
- Ainsi l'algorithme s'est déplacé uniformément du point de départ \mathbf{x}_0 jusqu'au point de coordonnées $[0.6, -0.4]$, en utilisant les plans 1 à 10, pour lesquels le pas est resté égal à 2. Pour cette phase, 29 expériences ont été nécessaires. En moyenne, il y eut donc environ 1.72 points récupérés par plan.
- Le dixième plan a alors montré qu'il n'existait pas de point diagonal meilleur que le point central. Les points axiaux ont donc été calculés (plan n°11) et la même conclusion a été tirée.
- Le pas a alors été décrémenté à 1, et les mêmes procédures ont été appliquées. Comme aucun point diagonal et axial ne s'est révélé être meilleur que le point central (trouvé dès le neuvième plan), celui adopte alors le statut de point optimal.

3.3. Méthodes par zooms

Les méthodes dites « par zooms » procèdent par diminution de la taille des plans utilisés à chaque itération.

Généralement, le plan initial couvre la totalité du domaine d'étude possible.

Les différentes méthodes de ce type se distinguent par :

- le type de plan utilisé à chaque itération ;
- les informations utilisées pour la déduction des nouveaux domaines.

3.3.1. Zooms - Rotations - Translations

3.3.1.1 Description

➤ Principe général

Cet algorithme s'appuie entièrement sur les données renvoyées par l'analyse canonique (annexe 3).

Les plans utilisés doivent donc permettre le calcul de modèles polynomiaux du second ordre.

La détermination des nouveaux domaines est faite en tenant compte :

- de la nature du point stationnaire relativement à l'optimum recherché (minimum, maximum ou minimax) ;
- de la définition des axes principaux (localisation de leur origine, orientation) ;
- des bornes de variation des variables selon chaque axe.

➔ Utilisation des iso-surfaces

L'annexe 4 montre l'équivalence entre la forme B des modèles du second degré et l'écriture générale des hyper-surfaces d'iso-valeurs, dans les espaces k -dimensionnels.

On rappelle l'écriture équivalente de cette forme B :

$$\frac{x_1^2}{\left(\frac{\zeta}{\lambda_1}\right)} + \frac{x_2^2}{\left(\frac{\zeta}{\lambda_2}\right)} + \dots + \frac{x_k^2}{\left(\frac{\zeta}{\lambda_k}\right)} = 1$$

Avec $\zeta = y_{\text{mod}} - y_S$. y_S est la valeur du modèle de la réponse, au point stationnaire. y_{mod} est une valeur fixée (constante) de ce modèle. ζ est par conséquent une constante.

On peut distinguer 2 situations, selon lesquelles la détermination des nouveaux domaines sera différente :

- le point stationnaire S est dans le DEP et décrit l'optimum recherché ;
- les autres cas.

L'étude de chacune d'elle est donnée par la suite.

➤ POINT S DANS LE DEP & MODELE DECRIVANT L'OPTIMUM RECHERCHE

Si tous les dénominateurs ζ/λ_i sont positifs, la relation précédente est l'équation d'une ellipse ($k=2$), ou d'un ellipsoïde ($k>2$). Cela est vérifié lorsque les surfaces de réponse du second degré présentent un minimum ou un maximum, donné par le point stationnaire.

En effet, si le modèle décrit un maximum, on sait que toutes les valeurs propres de \mathbf{B} sont négatives : $\lambda_i < 0$, $i = 1, 2, \dots, k$. Dans le même temps, le point stationnaire est obligatoirement un maximum, donc $y_S > y_{\text{mod}}$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^k - \{\mathbf{x}_S\}$, c'est-à-dire que $\zeta = y_{\text{mod}} - y_S < 0$. Donc finalement que $\zeta/\lambda_i > 0$.

Même raisonnement si le modèle décrit un minimum.

L'ellipsoïde ainsi défini possède k axes dont les demi-longueurs valent $\sqrt{\zeta/\lambda_i}$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Les $2 \cdot k$ extrémités des k axes sont données par :

$$\left[\pm \sqrt{\zeta/\lambda_1}, 0 \dots, 0 \right], \left[0, \pm \sqrt{\zeta/\lambda_2}, \dots, 0 \right], \dots, \left[0, 0, \dots, \pm \sqrt{\zeta/\lambda_k} \right]$$

Par extension, l'hyper-rectangle contenant exactement l'ellipsoïde précédemment présenté possède $2 \cdot k$ sommets de coordonnées :

$$\left[\pm \sqrt{\zeta/\lambda_1}, \pm \sqrt{\zeta/\lambda_2}, \dots, \pm \sqrt{\zeta/\lambda_k} \right]$$

Ces coordonnées sont données dans le système formé par les axes principaux $(S, z_1, z_2, \dots, z_k)$, associés au modèle du second degré. Elles peuvent ensuite être exprimées dans le système d'axes général originel $(O, x_1, x_2, \dots, x_k)$, en utilisant la relation :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_S + \mathbf{M} \cdot \mathbf{z}$$

L'hyper-rectangle déterminé précédemment définit alors pleinement le nouveau domaine.

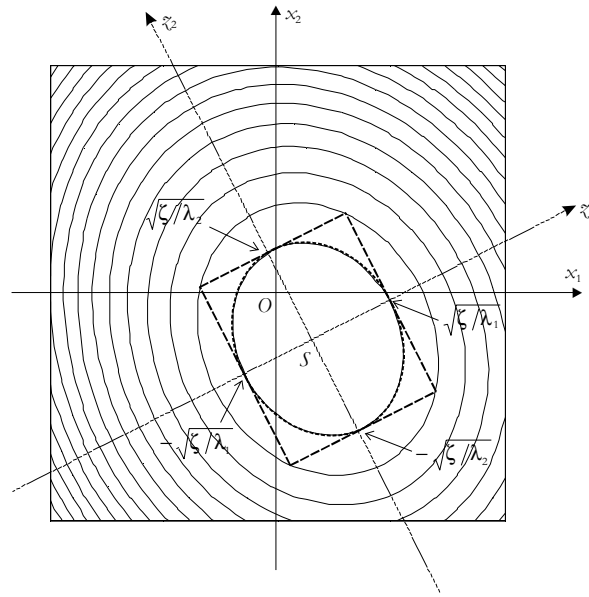


Figure 16 - Tracé de hyper-rectangle (---) enserrant l'iso-surface de valeur $y_{\text{mod}} = \zeta + y_S (\dots)$
 S est le point stationnaire ; il décrit l'optimum recherché

➤ AUTRES CONFIGURATIONS

On considère ici les autres cas, c'est-à-dire :

- le point stationnaire ne décrit pas l'optimum recherché ;
- le point stationnaire n'est pas dans le domaine courant ;
- il y a combinaison des 2 propositions précédentes.

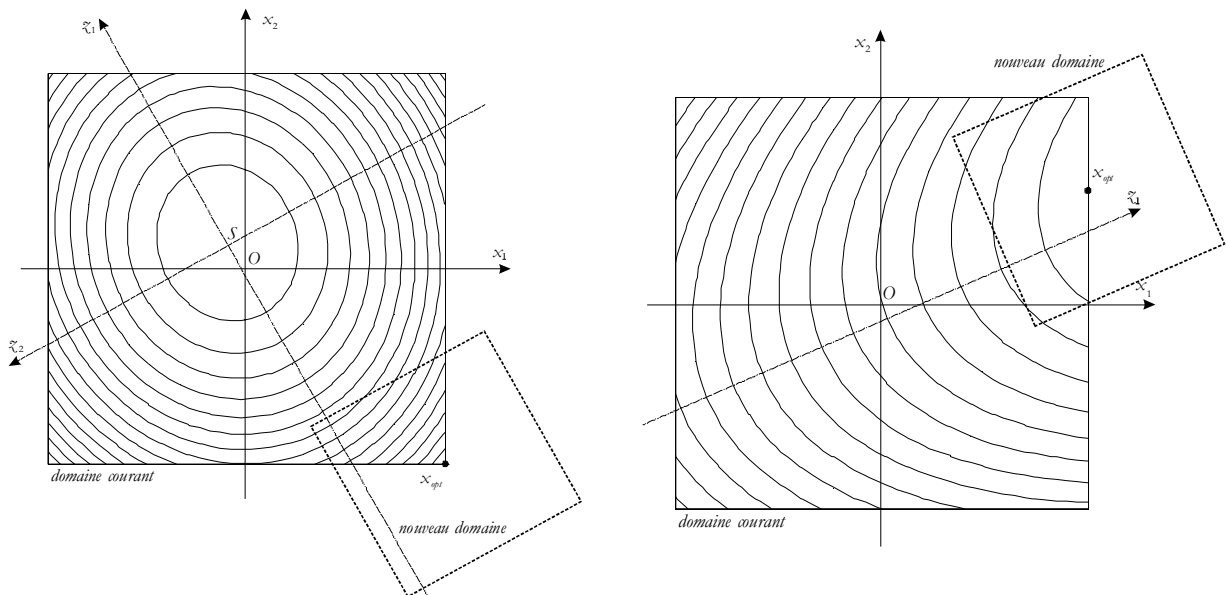


Figure 17 – 2 exemples de positionnement du nouveau domaine (---)
 Gauche : S est un minimum et l'optimum recherché est un maximum
 Droite : S est hors du domaine et décrit un point de selle

Il n'est plus possible d'appliquer la même stratégie pour définir le nouveau domaine. Dans ces situations, les conditions optimales recherchées sont obligatoirement situées sur la frontière de l'espace d'étude courant.

Le nouveau domaine d'étude est alors défini de la manière suivante :

- son centre est le point \mathbf{x}_{opt} du modèle courant pour lequel y_{mod} est optimum ; ce point est situé sur la frontière de l'espace courant ;

Méthodes d'optimisation par plans d'expériences

- les axes du nouveau domaine sont donnés par les axes principaux du modèle du second degré de l'espace courant ;
- les dimensions de ce nouveau domaine sont déduites de celles de l'ancien par un rapport de proportionnalité τ (de préférence inférieur ou égal à 1).

Les exemples de la Figure 17 donnent l'illustration du positionnement des nouveaux domaines, dans deux situations différentes, lorsque $k=2$. La figure de gauche illustre le cas où le modèle du second degré décrit un minimum (le point stationnaire étant dans le domaine courant) alors que le processus d'optimisation cherche un maximum. La meilleure valeur x_{opt} de ce modèle est trouvée grâce à l'analyse canonique récursive (annexe 3). Ce point devient le centre du nouveau domaine d'étude. Son orientation est donnée par les axes principaux du modèle calculé sur l'espace courant. Pour finir, les dimensions sont définies comme étant celles de l'espace courant multipliées par le coefficient $\tau=0.5$.

La même procédure est appliquée dans la situation représentée par la figure de droite. Dans cette configuration, le modèle définit un point stationnaire S hors du domaine d'étude, qui est de plus un minimax.

Les nouveaux domaines déterminés sont ainsi translatés, tournés et de volumes différents au regard des domaines précédents.

➔ Opération de zoom

L'opération de zoom offre un paramètre ajustable qui est le taux de réduction des dimensions du domaine couvert par le nouveau plan d'expériences. Cette information est déterminée par la procédure de caractérisation du nouveau plan. Il faut ici encore distinguer les deux situations vues précédemment.

➤ POINT S DANS LE DEP & MODELE DECRIVANT L'OPTIMUM RECHERCHE

Il a été vu que le nouveau domaine est l'hyper-rectangle contenant exactement l'hyper-surface d'iso-valeur déterminée par une valeur constante de $\zeta = y_{mod} - y_s$. En réalité, c'est la grandeur y_{mod} qui est fixée.

y_{mod} est telle que :

$$y_{mod} = y_{opt} - \rho \cdot (y_{max} - y_{min})$$

Avec $\rho > 0$ et $y_{opt} = y_{max}$ lorsque l'optimum cherché est un maximum et $y_{opt} = y_{min}$ si c'est le minimum qui est recherché.

Plus ρ est faible, plus le resserrement sur les conditions optimales sera important. Si $\rho = 0$, le nouveau domaine est alors réduit au point stationnaire S .

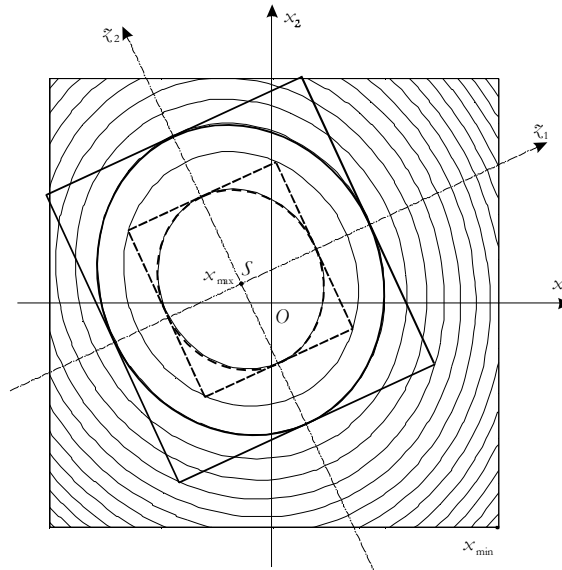


Figure 18 – Différences entre les domaines définis suivant la valeur de ρ (ρ_1 (-) et ρ_2 (--) avec $\rho_1 > \rho_2$)

La Figure 18 donne la représentation en lignes de contours d'une fonction réponse. Sont indiqués les points de réponse maximale (\mathbf{x}_{max}) et de réponse minimale (\mathbf{x}_{min}), les délimitations des nouveaux domaines définis pour 2 valeurs distinctes de ρ (ρ_1 et ρ_2). Dans cet exemple, $y_{opt} = y_{max}$.

Ainsi, suivant les coefficients du modèle de degré 2 utilisé, le volume du nouveau domaine relativement au premier varie. Le taux de réduction est donc fonction de la topologie, et donc indirectement des variations de la fonction réponse.

Le nouveau domaine possède un système d'axes qui n'est autre que le système d'axes principaux du modèle d'ordre 2 calculé dans le domaine courant : $(S, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_k)$.

On notera bien que la variable \tilde{z}_i ne décrit pas les variations du facteur i seul, mais les variations d'une combinaison des k facteurs. Cela est le cas dès la deuxième itération de l'algorithme.

Considérons l'évolution des plages de variation sur le $\tilde{z}^{ème}$ axe, lors du passage de la première itération de l'algorithme à la seconde.

La variable x_i est définie dans l'intervalle de valeurs $[b_{inf,i}, b_{sup,i}]$ alors que \tilde{z}_i ne peut plus varier que dans $[-\sqrt{\xi/\lambda_i}, \sqrt{\xi/\lambda_i}]$. On peut définir un coefficient de changement d'échelle du domaine, pour le $\tilde{z}^{ème}$ axe :

$$\rho_i = 2 \cdot \frac{\sqrt{\xi/\lambda_i}}{b_{sup,i} - b_{inf,i}} \quad i = 1, 2, \dots, k$$

Les valeurs de ρ_i inférieures à 1 indiquent un effet de zoom, selon le $\tilde{z}^{ème}$ axe du domaine considéré. Les valeurs de ρ_i supérieures à 1 ne doivent si possible pas être rencontrées, puisqu'elles caractérisent un processus d'optimisation divergent (au moins dans l'itération en cours).

Ce raisonnement peut être appliqué pour les itérations suivantes, ce qui induit que les ρ_i ne restent pas constants.

➤ AUTRES CONFIGURATIONS

Dans le paragraphe correspondant de la partie précédente « Utilisation des iso-surfaces », un rapport de proportionnalité τ a été présenté.

Afin de faire le rapprochement avec les cas étudiés précédemment, on peut écrire ici :

Méthodes d'optimisation par plans d'expériences

$$\rho_i = \tau (< 1) \quad i = 1, 2, \dots, k$$

Les ρ_i sont ici des constantes.

► Plans utilisés

A la différence des plans utilisés par les méthodes de glissements, on ne cherche pas à tout prix à employer des plans ayant des propriétés intéressantes quant au partage de points.

En effet, les opérations effectuées sur les domaines de plans (zooms, rotations et translations) disjoignent les plans les uns des autres.

Le choix des plans du second degré à utiliser est donc réalisé autrement.

Ainsi, dans le cas présent, c'est la fiabilité de l'information donnée par les modèles qui est recherchée. Dans cette optique, l'erreur de modélisation peut être limitée en employant un plus grand nombre de points d'expériences pour le calcul de chaque modèle.

Ceci est d'autant plus justifié que le domaine considéré est grand, lors des premières itérations. Il est en effet d'usage de couvrir le domaine entier d'étude possible par le premier plan, lors de la première itération.

Lorsque le point optimum est identifié, l'usage de plans moins gourmands en expériences peut alors être fait.



L'algorithme peut être amené à devoir utiliser des plans optimaux lorsque le nouveau domaine possède au moins un sommet hors du DEP.

Une telle situation est illustrée par la Figure 19.

La définition des points candidats doit alors prendre en compte :

- les bornes de variation des k facteurs ;
- les éventuelles contraintes en position ;
- l'orientation, le placement et la taille du nouveau domaine, relativement au domaine courant.

Ils doivent en effet être :

- dans le DEP, c'est-à-dire représenter des expériences réalisables ;
- dans le nouveau domaine, pour qu'un modèle du second degré puisse y être calculé.

Pour vérifier qu'un point candidat est bien intérieur au nouveau domaine, la méthode la plus simple consiste à exprimer ses coordonnées dans le repère (tourné et translaté) correspondant ; et de vérifier alors que toutes les composantes sont comprises dans les bornes de ce domaine.

Méthodes d'optimisation par plans d'expériences

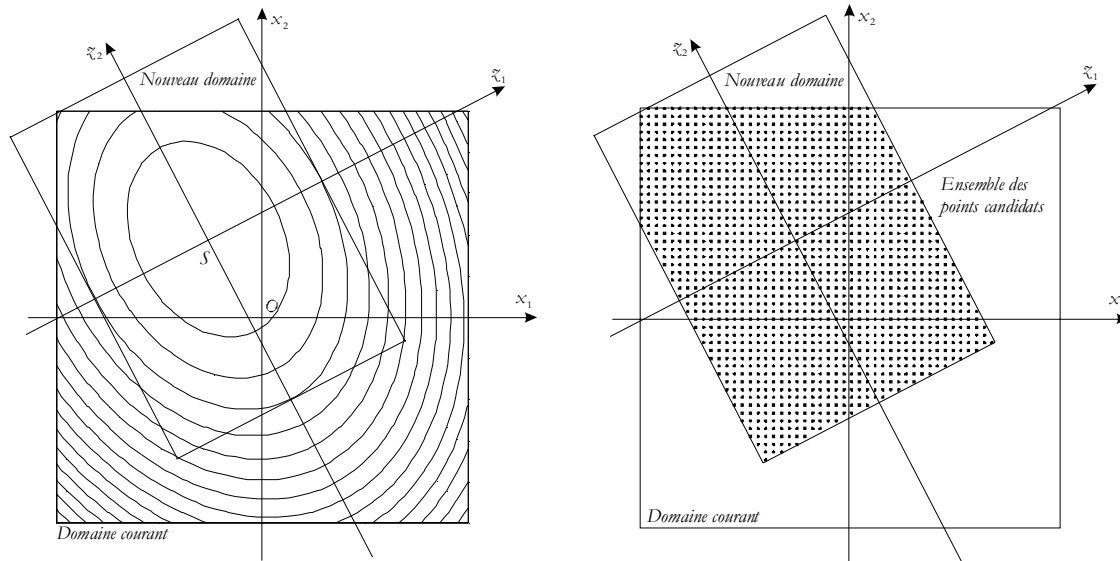


Figure 19 - Exemple de nouveau domaine défini partiellement hors des limites du DE (gauche)
Ensemble des points candidats correspondant (droite)
(Dans le cas présenté ici, le domaine courant n'est autre que le DEP. Il n'y a aucune contrainte en position.)

Accessoirement, les plans optimaux utilisés peuvent être calculés afin d'utiliser les expériences déjà réalisées et satisfaisant aux conditions de validité des points candidats. Une faible économie d'expériences peut donc avoir lieu ici.

➔ Condition d'arrêt de l'algorithme

Le critère d'arrêt repose sur l'évolution des volumes des domaines au cours du déroulement de l'algorithme.

Il y a arrêt à la i^{me} itération, lorsqu'est vérifiée la relation suivante :

$$\left(\frac{V_{p,i-1} - V_{p,i}}{V_{p,1}} \right) \cdot 100 \leq \text{seuil} (\%)$$

Où $V_{p,i}$ est le volume (k -dimensionnel) du domaine étudié lors de la i^{me} itération de l'algorithme.

Si, lors de la première itération, tout le domaine d'étude est considéré, alors $V_{p,1}$ désigne le volume du DE lui-même.

3.3.1.2 Résumé des caractéristiques

➔ Caractéristiques générales

- Algorithme itératif ;
- Optimisation sur facteurs continus ou discrets ;
- Evolution possible dans un domaine d'étude contraint ;
- S'arrête lorsque l'évolution de la taille des domaines considérés passe sous un seuil.

➔ Paramètres ajustables

- Type de plan utilisé et caractéristiques du plan ;
- Taux de réduction des dimensions des plans, d'une itération sur l'autre ;
- Seuil d'arrêt de l'algorithme.

➔ Points forts

- Fournit une modélisation de la fonction réponse sur l'ensemble du domaine d'étude possible ;
- Modélise de plus en plus finement le voisinage du point optimum.

➔ Points faibles

- Dédit les modalités de resserrement en fonction de modélisations d'ordre 2 qui peuvent s'avérer imprécises dans certains cas ;
- Génère rapidement des plans d'expériences ayant au moins 1 point hors du domaine d'étude possible, du fait de la rotation des plans. Par conséquent, fait souvent appel au calcul de matrices optimales ;
- Peu de récupération de points à envisager ;
- De manière générale, algorithme coûteux en calcul ;
- L'optimum trouvé est local.

3.3.1.3 Algorithme

- (1) > Réaliser le plan de RSM ;
- (2) > Calculer le modèle polynomial de degré 2 correspondant, et effectuer l'analyse canonique ;
- (3) > Déterminer les dimensions et le placement du nouveau domaine, par les règles données plus haut ;
- (4) > Recommencer en (1).

3.3.1.4 Application sur la fonction test

Tableau 5 - Résultats numériques de l'optimisation de la fonction test

Paramètres de l'algorithme	Info. optimisation		Meilleur point	
	Nb pts	Nb plans	Coordonnées	Réponse
Seuil arrêt : 1e-3 Sans grille	70	7	[0.57721, -0.38405]	2.26717

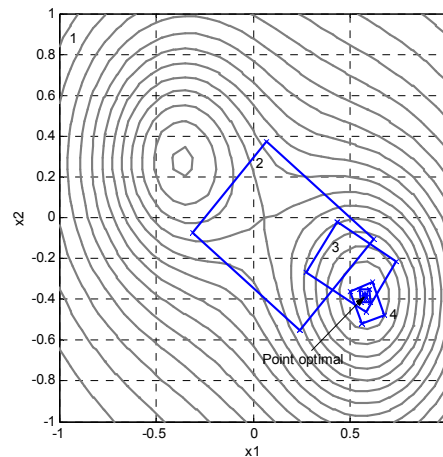


Figure 20 - Disposition des plans dans le DE relativement à la fonction objectif

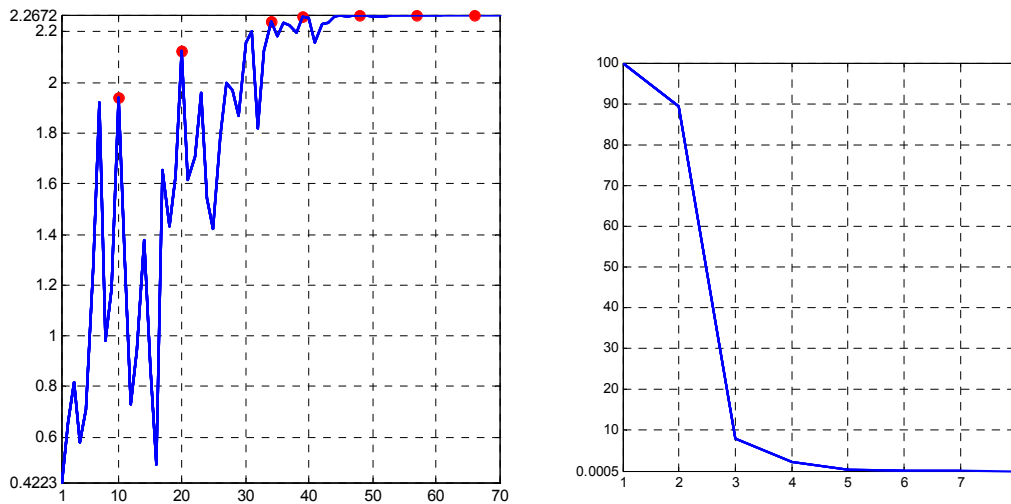


Figure 21 - Valeurs de la réponse aux points d'expériences (gauche)
Evolution du critère d'arrêt (droite)

- Cette méthode a nécessité 70 expériences réparties entre 7 plans. Le premier est un plan factoriel complet à 4 niveaux par facteur 4^k , demandant 16 évaluations de la fonction réponse. Les 6 autres plans sont également factoriels complets, mais à 3 niveaux par facteur (9 expériences). On remarque ainsi qu'il n'y a aucune récupération de points entre plans.
- La Figure 20 montre la disposition des domaines successivement considérés dans le DE. Seuls sont numérotés les 4 premiers. On observera particulièrement le placement, la taille et l'orientation des domaines entre eux.
- Il peut être affirmé que la localisation du point optimum est déterminée de façon sûre dès le quatrième plan : celui-ci donne en effet un modèle du second ordre décrivant un maximum (i.e. l'optimum recherché) situé dans le domaine correspondant, et que de plus, il en est de même lors des itérations suivantes. Ainsi, les plans 5 à 7 ne sont là que pour gagner en précision sur x_{opt} .
- L'algorithme s'est arrêté dès que le pourcentage de diminution de volume des domaines considérés est devenu inférieur à 0.001. L'illustration de droite montre l'évolution de ce critère d'arrêt, au cours des 8 itérations du processus d'optimisation.

3.3.2. Zooms sans calcul de modèles

3.3.2.1 Description

➤ Principe général

Le principe de cet algorithme d'optimisation a été donné par Frédéric Gillon dans son mémoire de thèse [Gillon 97]. Il est ici modifié et complété afin de généraliser son fonctionnement aux espaces multidimensionnels, et pour prendre en compte certaines configurations particulières.

Dans son fonctionnement, il peut être vu comme une version simplifiée de l'algorithme « Zooms - Rotations - Translations ». En effet, l'opération de rotation n'est ici pas appliquée.

Cet algorithme ne nécessite pas le calcul de modèles de la réponse, mais utilise directement les valeurs des réponses aux points d'expériences. Ceux-ci sont placés aux sommets et au centre de chaque domaine hyper-rectangulaire.

➤ Plan utilisé

On suppose de prime abord qu'il n'existe pas de contraintes appliquées au domaine d'étude. Il est en effet nécessaire que le domaine ait une forme hyper-rectangulaire, afin que le plan initial puisse couvrir l'ensemble du volume, et que toutes les expériences puissent être réalisées.

A chaque itération, on réalise un plan factoriel complet plus un point au centre, c'est-à-dire 2^k+1 expériences. Parmi ces points, on retient celui dont la réponse obtenue est la meilleure, au sens de l'optimalité voulue.

On définit alors le nouveau domaine, de volume inférieur au précédent, dans une zone englobant ce meilleur point.

➔ Opérations de zooms

Lorsque le point central du plan est celui où la réponse est la meilleure, le nouveau domaine garde alors ce point comme centre, et ses dimensions sont celles du domaine courant divisées par un taux de réduction τ . Le nouveau domaine est intérieur au domaine courant pour $\tau > 1$.

Lorsque la meilleure réponse n'est pas trouvée au point central, le nouveau domaine est centré sur ce meilleur point et adopte les mêmes dimensions que le domaine courant. Par conséquent, le nouveau domaine n'est pas entièrement inclus dans le DE : seul doit être considérée la zone valide.

Dans le meilleur des cas, il est possible de récupérer 2 points du plan précédent (le point central et un point de sommet). Ceci n'est réalisable que si τ vaut 1. Cette configuration de récupération de points est répertoriée dans l'annexe 2.

Dans tous les cas, à la différence de l'algorithme précédent, aucune rotation n'est appliquée, ce qui permet de conserver les arêtes des domaines hyper-rectangulaires toujours parallèles aux axes du repère général.

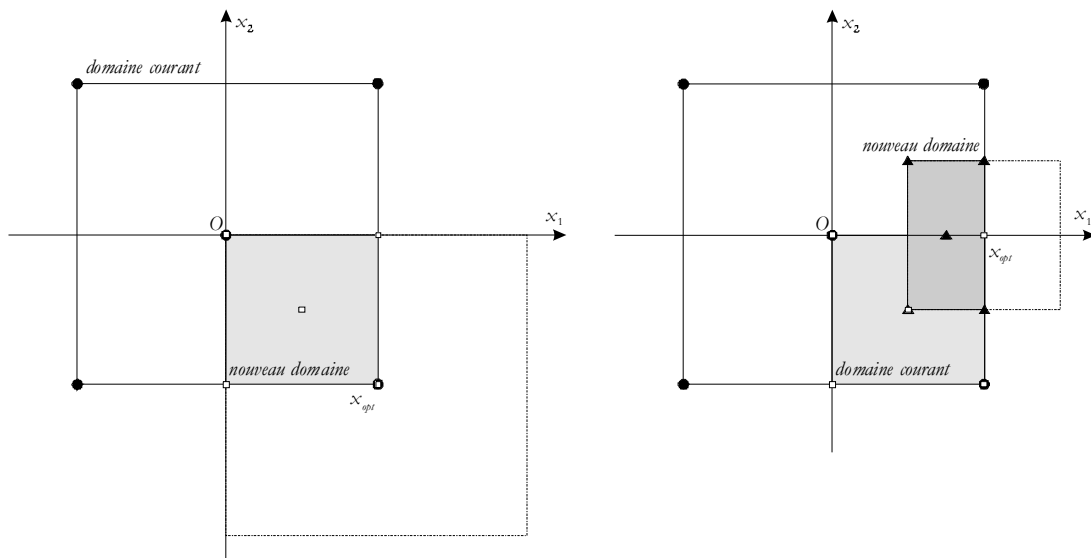


Figure 22 - Exemple de détermination des nouveaux domaines sur 2 itérations
 (● : premier plan ; □ : deuxième plan ; ▲ : troisième plan)

➔ Condition d'arrêt de l'algorithme

A chaque itération sont réalisées $N=2^k+1$ expériences (les récupérations de points ne sont pas considérées ici). Parmi ces N points, peuvent être identifiées les valeurs extrêmes de la fonction réponse : J_{\min} et J_{\max} .

Si l'on considère à présent toutes les valeurs de réponse obtenues au cours de toutes les itérations de l'algorithme, on peut relever de la même façon les extremums : Y_{\min} et Y_{\max} .

Puisque $Y_{\min} = J_{\min}$ et $Y_{\max} = J_{\max}$ lors de la première itération, le test d'arrêt n'est effectué qu'à partir de la deuxième itération. Celui-ci consiste à tester si :

$$\left(\frac{Y_{\max} - Y_{\min}}{Y_{\max} - Y_{\min}} \right) \cdot 100 \leq \text{seuil} (\%)$$

Si l'optimum recherché est un maximum, alors $Y_{\max} = J_{\max}$; dans le cas d'un minimum : $Y_{\min} = J_{\min}$.

3.3.2.2 Résumé des caractéristiques

➔ Caractéristiques générales

- Algorithme itératif ;

Méthodes d'optimisation par plans d'expériences

- Optimisation sur facteurs continus ou discrets ;
- Evolution dans un domaine d'étude non contraint (domaine hyper-rectangulaire) ;
- S'arrête par passage du taux d'accroissement de la réponse sous un seuil fixé.

➔ Paramètres ajustables

- Taux de réduction des dimensions des plans, d'une itération sur l'autre ;
- Seuil d'arrêt de l'algorithme.

➔ Points forts

- Simplicité des calculs nécessaires, et donc robustesse de l'algorithme ;
- Nombre restreint d'expériences à réaliser à chaque itération, pour les petites valeurs de k .

➔ Points faibles

- L'optimum trouvé est local, et cela même malgré le fait que le domaine couvert initialement soit le domaine d'étude entier ;
- Ne peut gérer les domaines contraints ;
- Ne peut utiliser les plans économiques (plans factoriels fractionnaires par exemple).

3.3.2.3 Algorithme

- (1) > Réaliser le plan factoriel complet 2 niveaux par facteur avec 1 point au centre ; il y a donc 2^k+1 expériences ;
- (2) > Identifier le point ayant la meilleure réponse (au sens de l'optimalité voulue) ;
- (3) > Déterminer les dimensions et le placement du nouveau domaine, par la règle donnée plus haut ;
- (4) > Recommencer en (1).

3.3.2.4 Application sur la fonction test

Tableau 6 - Résultats numériques de l'optimisation de la fonction test

Paramètres de l'algorithme	Info. optimisation		Meilleur point	
	Nb pts	Nb plans	Coordonnées	Réponse
Coef. reduc. : 1 Seuil arrêt : 1e-3	45	14	[0.57813, -0.39063]	2.26697

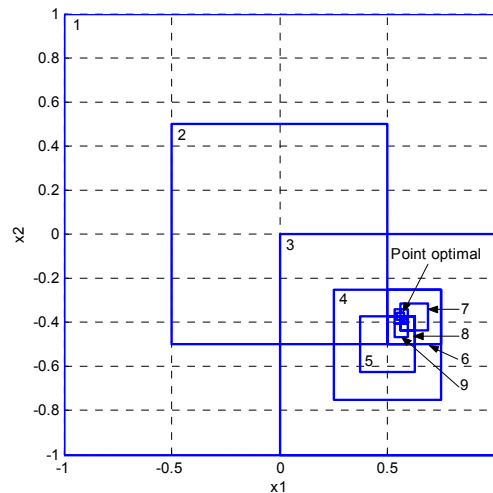


Figure 23 - Disposition des plans dans le DE

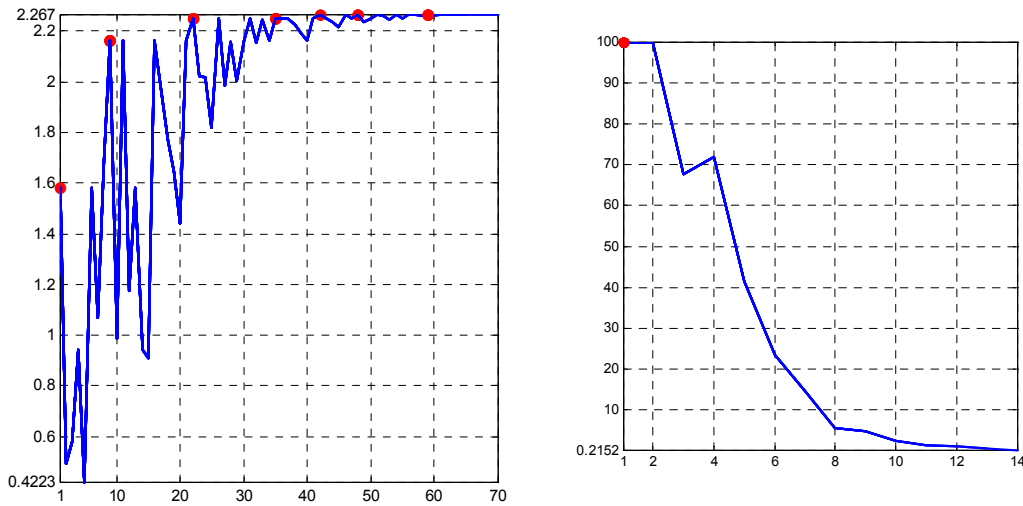


Figure 24 - Valeurs de la réponse aux points d'expériences (gauche)
Evolution du critère d'arrêt (droite)

- 14 plans sont utilisés ici. Tous sont du type factoriel complet à 2 niveaux par facteur, augmentés d'un point au centre. Les configurations de récupérations de points entre ce type de plans de tailles différentes, sont données dans la dernière partie de l'annexe 2.
- La Figure 23 donne un aperçu du placement relatif des différents domaines entre eux. Seuls les 9 premiers sont référencés.
- La Figure 24 trace les valeurs de la réponse aux points d'expériences, pour chaque plan. Les récupérations de points n'apparaissent pas ici : il y a bien $14 \times 5 = 70$ expériences (non distinctes) demandées par l'algorithme. Par conséquent, il y a $70 - 45 = 25$ points récupérés.
- Dans le meilleur des cas, les dimensions du plan à réaliser à la prochaine itération valent la moitié de celles du domaine courant. Augmenter cette « puissance de zoom » aurait certainement pu accélérer la convergence, mais le nombre de points aurait crû, vu que les récupérations de points sont optimales lorsque le coefficient de réduction vaut 1.
- L'évolution des valeurs du critère d'arrêt est donnée par la Figure 24.

3.4. Méthodes exhaustives

Les méthodes exhaustives ont en commun la modélisation complète du domaine d'étude possible par la réalisation de plans mis côte à côte ou emboîtés.

3.4.1. Utilisation de plans factoriels

3.4.1.1 Description

➤ Principe général

Le domaine d'étude (hyper-rectangulaire) est divisé en N_{sd} sous-domaines ; sur chacun d'eux est calculé un plan factoriel complet ou fractionnaire.

Le découpage du volume se réalise par la partition du domaine selon chacune de ses k dimensions.

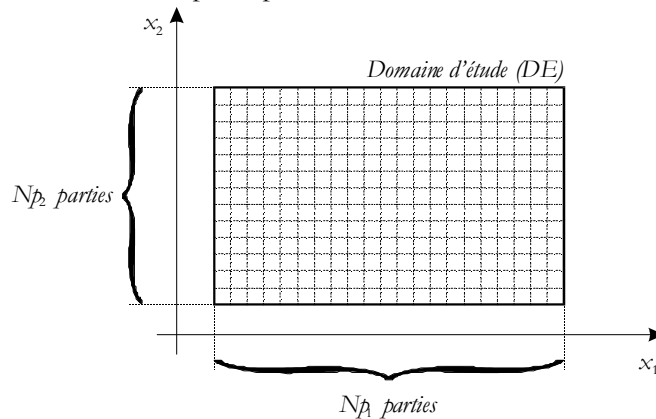


Figure 25 - Illustration simplifiée de la décomposition du DE en sous-domaines

Méthodes d'optimisation par plans d'expériences

Soit N_{p_i} le nombre de divisions imposées sur le domaine pour la i^{me} dimension ($i=1,2,\dots,k$). Le nombre total de sous-domaines est $N_{sd} = \prod_{i=1}^k N_{p_i}$.

Cette opération de partition définit dans le même temps une grille régulière comportant $N_{pc} = \prod_{i=1}^k (N_{p_i} + 1)$ points. Ainsi, si des plans factoriels complets étaient réalisés en chacun des N_{sd} sous-domaines, le nombre total d'expériences serait égal à N_{pc} (pc est mis pour *plan complet*). Il est clair que cette valeur devient vite très grande, en particulier lorsque k augmente, conduisant à des coûts expérimentaux exorbitants.

La solution réside donc dans l'utilisation privilégiée des plans factoriels fractionnaires.

➔ Récupération de points entre plans

Le calcul des coordonnées des points dans le DE pourra être réalisé de 2 manières différentes :

- soit en utilisant la définition des générateurs indépendants pour les plans définis dans chacun des sous-domaines ;
- soit directement, en fonction de leurs coordonnées sur la grille.

➤ DEFINITION DES GENERATEURS INDEPENDANTS

On définit le *plan de base* comme étant le plan de référence, celui à partir duquel la définition des autres plans est déduite. Ainsi, relativement à ce plan particulier peuvent être définis, par exemple, 3 autres plans dans les directions des axes (O,x_1) , (O,x_2) et (O,x_3) :

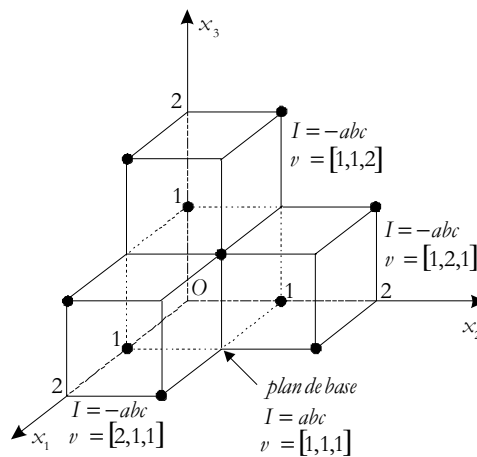


Figure 26 – Exemple d'application généralisée de la technique de récupération de points entre plans fractionnaires

Notons par un vecteur \mathbf{v} à k éléments entiers, la position de tout plan parmi les N_{sd} sous-domaines. Le i^{me} élément indique le rang du plan dans la i^{me} direction ($i=1,2,\dots,k$). Par conséquent, $1 \leq v_i \leq N_{p_i}$. Le plan de base est positionné suivant $\mathbf{v} = \mathbf{1}_{k \times 1}$.

L'algorithme suivant généralise le calcul des générateurs indépendants, pour un sous-domaine donné placé dans le DE suivant un vecteur \mathbf{v} déterminé :

- (1) ➤ Pour i allant de 1 à k
- ➔ Si $v(i)$ est impair
 - ➔ Ne rien changer aux citations du facteur i dans la définition des générateurs indépendants du plan de base;
 - ➔ Si $v(i)$ est pair
 - ➔ Dans la définition des générateurs indépendants, remplacer les citations du facteur $n^{\circ}i$ (a pour le facteur 1, b pour le facteur 2, etc.) par leur opposé ($-a$, $-b$, ... respectivement).

On notera que les vecteurs \mathbf{v} dont les éléments sont tous impairs définissent les domaines pour lesquels les générateurs indépendants du plan de base sont utilisés.

Méthodes d'optimisation par plans d'expériences

A titre d'exemple, considérons un domaine multidimensionnel où $k=6$. Les plans fractionnaires utilisés sont des 2^{6-3} , de résolution III. Les générateurs indépendants associés donnant cette résolution sont $I=abd=ace=bcf$.

Le tableau suivant indique les générateurs modifiés des 6 plans couvrant les domaines mitoyens au plan de base.

Tableau 7 - Exemple de calcul des générateurs indépendants de plans fractionnaires suivant la valeur du vecteur de positionnement \mathbf{v}

Position (\mathbf{v})	Générateurs
[2 1 1 1 1 1]	$I=-abd=-ace=bcf$
[1 2 1 1 1 1]	$I=-abd=ace=-bcf$
[1 1 2 1 1 1]	$I=abd=-ace=-bcf$
[1 1 1 2 1 1]	$I=-abd=ace=bcf$
[1 1 1 1 2 1]	$I=abd=-ace=bcf$
[1 1 1 1 1 2]	$I=abd=ace=-bcf$

A la position $\mathbf{v}=[3\ 5\ 8\ 2\ 5\ 7]$, les générateurs à utiliser sont $I=-abd=-ace=-bcf$.

La connaissance des générateurs indépendants pour chacun des plans permet alors de déduire le placement des points d'expériences.

On observe ainsi que tous les résultats sont déduits de la simple connaissance des générateurs indépendants du plan de base.

➤ DEFINITION DES COORDONNEES DES POINTS D'EXPERIENCES

Notons par $\mathbf{p}=[p_1, p_2, \dots, p_k]$ le vecteur coordonnées de tout point de la grille définie par les sommets des sous-domaines composant le DE.

Les coordonnées centrées réduites ne peuvent plus être utilisées. Chaque plan est à présent défini par défaut dans un espace hyper-cubique dont chaque côté est de longueur unitaire. Dans ce cadre, les p_i sont des valeurs entières telles que $0 \leq p_i \leq Np_i$.

Etant donné que les facteurs ne peuvent prendre que des facteurs entières et positives, l'interprétation des générateurs doit être adaptée.

Ainsi, écrire $I=abd$ revient à ne retenir que les points de la grille tels que $p_1+p_2+p_4$ soit impair.

Le générateur $I=-ace$ définit les points avec $p_1+p_3+p_5$ pair.

La généralisation est immédiate.

Soit G l'écriture des générateurs indépendants du plan de base. Par construction, G est composée de e égalités. Ainsi, si par exemple G vaut $I=abd=-ace=bcf$, G est décomposable en $e=3$ égalités ($I=abd$, $I=-ace$ et $I=bcf$). Il définit donc les points tels que soient vérifiées les $e=3$ propositions suivantes :

- $p_1+p_2+p_4$ est impair ;
- $p_1+p_3+p_5$ est pair ;
- $p_2+p_3+p_6$ est impair.

Cette procédure peut être systématisée, par l'application de l'algorithme donné ci-après.

- (1) ➤ Construire l'ensemble \mathbf{E} des coordonnées des N points de la grille
 (2) ➤ Pour i allant de 1 à e
 ➤ Supprimer de \mathbf{E} les coordonnées ne vérifiant pas la traduction pair/impair de la $i^{\text{ème}}$ égalité

➔ Nombre total d'expériences

S'il y a utilisation des mêmes plans factoriels fractionnaires 2^{k-r} dans tout le DE, et vu l'agencement de chacun d'eux les uns par rapport aux autres, le nombre total d'expériences nécessaires N_{pf} peut être estimé :

$$N_{pf} \approx \frac{N_{pc}}{2^r} = \frac{1}{2^r} \cdot \prod_{i=1}^k (N_{p_i} + 1)$$

pf est mis pour *plan fractionnaire*.

N_{pf} est la valeur exacte lorsque $\sum_{i=1}^k N_{p_i}$ est impair.

La relation précédente montre l'intérêt majeur de la méthode. Le nombre d'expériences théoriquement nécessaires par utilisation de plans complets est divisé ici par 2^r .

Cette économie se paye bien entendu dans la qualité des modèles déduits. Avec les plans complets, il est possible de calculer toutes les interactions entre facteurs en plus des effets principaux. Les plans fractionnaires ne permettent le calcul que d'un nombre restreint de ces interactions.

➔ Choix des plans fractionnaires

On rappelle que le facteur de réduction est la valeur r dans l'écriture usuelle des plans factoriels fractionnaires 2^{k-r} . Avec les générateurs indépendants, ce paramètre est une des valeurs définissant les plans fractionnaires. Vient le problème de leur détermination.

Il est clair qu'il est préférable d'opter pour la plus grande valeur de r , étant donné qu'elle permet la plus grande économie d'expériences (voir calcul du nombre d'expériences nécessaires).

Cependant, le choix de la valeur de r est inhérent aux difficultés de la technique du screening, et plus particulièrement aux confusions d'effets, surtout pour les petites résolutions.

On retrouve ici une remarque donnée dans la description de la méthode de glissement de plans du premier ordre (cf. 3.2.1.1). La valeur de r détermine les générateurs utilisés. Ceux-ci doivent être « assez bons » pour ils ne définissent pas des confusions d'effets principaux avec des interactions susceptibles d'être non négligeables sur le domaine, ou du moins sur une de ses parties.

➔ Condition d'arrêt de l'algorithme

La méthode s'arrête dès qu'un plan factoriel fractionnaire a été calculé dans chacun des N_{sd} sous-domaines.

➔ Matrices treillis

Le placement particulier des points d'expériences décrit précédemment suit des règles précises. Celles-ci ont été retenues pour servir de base à la construction d'un nouveau type de matrices d'expériences : les *matrices treillis*. Elles sont rappelées dans l'Annexe 1, dans le paragraphe traitant des matrices mixtes.

3.4.1.2 Résumé des caractéristiques

➔ Caractéristiques générales

- Algorithme séquentiel ;
- Optimisation sur facteurs continus ou discrets ;
- Evolution possible dans un domaine d'étude contraint ;
- S'arrête à la fin de la réalisation de tous les plans initialement prévus par l'algorithme.

➔ Paramètres ajustables

- Facteur de réduction du plan fractionnaire utilisé ;
- Nombre de découpes N_{p_i} du domaine d'étude initial selon chacune des k dimensions.

➔ Points forts

- L'algorithme permet de réaliser un balayage exhaustif du DE ;
- Permet de réaliser une analyse de screening sur l'ensemble du domaine (construction de la carte des variations d'influence des facteurs relativement à une réponse donnée) ;
- Le nombre d'expériences nécessaires est fortement réduit grâce à l'utilisation de plans fractionnaires, et à la récupération particulière de points entre eux ;
- Les techniques associées au screening peuvent être appliquées sur chacun des sous-domaines couverts, notamment l'analyse de la variance ;
- Les points d'expériences sont régulièrement espacés dans le domaine d'étude ; le maillage k -dimensionnel est donc régulier et l'interpolation obtenue par tessellation est uniforme en précision ;
- L'optimum trouvé est global ;
- Les points d'expériences peuvent être utilisés pour la construction de modèles d'ordre élevé.

➔ Points faibles

- Nécessite un nombre non négligeable d'expériences pour tout modéliser ; en effet, cet algorithme n'est utile que si l'ensemble du domaine est couvert ;
- Ne peut gérer entièrement les domaines contraints.

3.4.1.3 Algorithme

- (1) > Définir les nombres N_{p_i} de divisions du domaine d'étude selon les k dimensions.
- (2) > Pour chacun des N_{sd} sous-domaines ainsi définis :
 - (3) ➔ Calculer les générateurs indépendants afin de récupérer les points d'expériences des plans déjà réalisés sur les domaines mitoyens ;
 - (4) ➔ Réaliser le plan d'expériences de screening et calculer le modèle correspondant ;
 - (5) ➔ Stocker éventuellement, pour chaque sous domaine :
 - les valeurs de la fonction réponse pour chaque expérience (déduire le meilleur point au sens de l'optimalité voulue) ;
 - les valeurs des effets des facteurs ;
 - les résultats de l'ANOVA sur facteurs ;
 - etc.

3.4.1.4 Application sur la fonction test

Tableau 8 - Résultats numériques de l'optimisation de la fonction test

Paramètres de l'algorithme	Info. optimisation		Meilleur point	
	Nb pts	Nb plans	Coordonnées	Réponse
Nb parties : [10, 10]	121	100	[0.6, -0.4]	2.26219

Méthodes d'optimisation par plans d'expériences

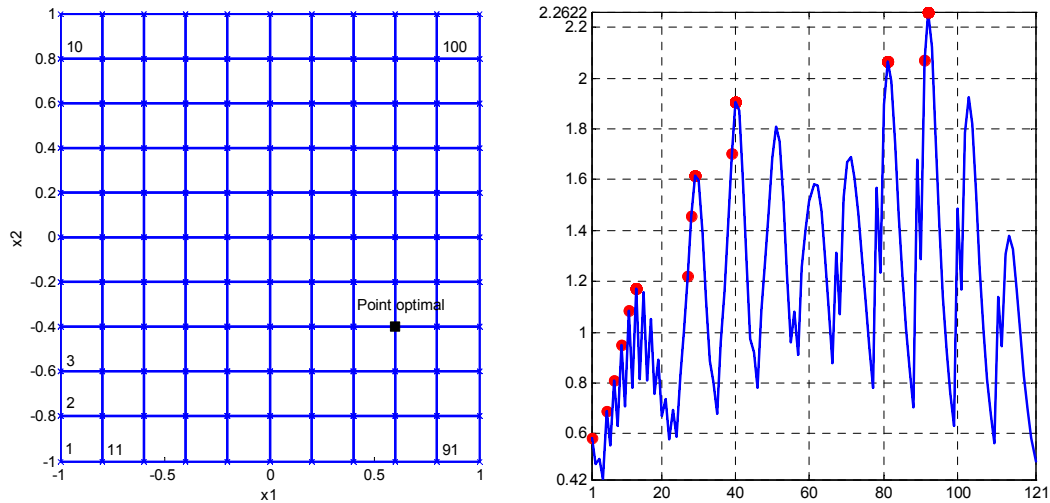


Figure 27 - Disposition des plans dans le DE (gauche)
Valeurs de la réponse aux points d'expériences (droite)

- Le DE est partitionné en 100 sous-domaines, vu que les bornes de variation des 2 facteurs x_1 et x_2 ont été toutes les 2 scindées en 10 parties. Les plans calculés dans chacun des domaines sont du premier ordre ; ils sont tous identiques.
- L'emploi de cette méthode ici, lorsque $k=2$, ne permet pas de mettre en avant l'intérêt d'un tel algorithme. En effet, le principal atout réside dans l'emploi de plans factoriels fractionnaires, qui n'existent que pour $k>2$. Dans l'application présentée ici, des plans factoriels complets à 2 niveaux ont été utilisés. Cela revient donc à calculer $(10+1) \times (10+1) = 121$ expériences. Dans tous les cas, ces points sont placés régulièrement sur une grille.
- L'optimum trouvé est obligatoirement un point de cette grille, car les modèles calculés ne prennent pas en compte les effets quadratiques éventuels. Dans notre cas, il s'agit de $\mathbf{x}_{opt} = [0.6, -0.4]$.

3.4.2. Utilisation de plans du 2nd ordre (plans de RSM)

3.4.2.1 Description

➔ Principe général

Cet algorithme est le pendant de la méthode précédente, par l'utilisation de plans de RSM et d'opérations de zooms. Le but est de modéliser la fonction réponse par morceaux, grâce à des plans du second degré.

De manière générale, à chaque étape, il y a réalisation d'un plan d'expériences dans le domaine courant, afin de calculer un modèle polynomial d'ordre 2. Celui-ci est considéré comme valable si ses coefficients d'ajustement sont supérieurs à des valeurs seuil indiquées par l'expérimentateur. Dans le cas contraire, le domaine d'étude courant est scindé en 2^k sous-domaines pour lesquels le même processus est répété.

➔ Plans utilisés

Le plan par défaut est un plan factoriel complet à 3 niveaux par facteur. Il y a dans ce cas 3^k expériences par plan.

Cependant, le domaine d'intérêt courant peut être soumis à des contraintes. Dans ce cas, le plan par défaut ne peut être réalisé totalement et un plan optimal (de type D ou A par exemple) est alors calculé.

L'ensemble des points candidats doit être une grille de points, généralement déduite de celle définie par les N_{vi} valeurs intermédiaires de chacun de k facteurs. De manière générale les points candidats doivent appartenir au domaine courant et n'être pas exclus par les contraintes en position.

Le nombre N_c de points candidats doit être strictement supérieur à $\nu(k,2)$. Si ce ne peut être le cas, le domaine courant n'est alors pas modélisé.

En réalité, la valeur exacte de N_c n'est pas imposée mais le plan optimal est calculé avec un nombre de points candidats compris dans l'intervalle $[\nu(k,2)+1, \nu(k,2)+4]$ (à supposer qu'il y ait dans ce cas

Méthodes d'optimisation par plans d'expériences

$\nu(k,2)+4$ points candidats ; s'il n'y en a que N_{cmax} , il faut alors considérer l'intervalle $[\nu(k,2)+1, N_{cmax}]$ ($N_{cmax} > \nu(k,2)$)).

Le plan optimal retenu est alors celui pour lequel le déterminant normé est le plus grand.

➔ Ajustement des modèles

Le modèle polynomial d'ordre 2 doit satisfaire à des « critères de qualité » listés ci-après :

- valeur de R^2 (coefficient de corrélation multiple) inférieure à un seuil donné (0.99 par défaut) ;
- valeur de R^2a (coefficient de corrélation multiple ajusté) inférieure à un seuil donné (0.9 par défaut) ;
- valeur du rapport $\hat{\sigma}/\Delta y$ ($\hat{\sigma}$ est l'écart-type sur les valeurs calculées du modèle ; Δy est la différence entre les valeurs extrêmes du vecteur des réponses du plan réalisé) inférieure à un seuil donné (5% par défaut) ;
- valeur de P_{repr} (probabilité que le modèle soit représentatif des données à partir desquelles il est calculé, d'après l'analyse de la variance sur le modèle) supérieure à un seuil donné (95% par défaut).

L'utilisateur de l'algorithme choisit parmi les critères précédents, et indique dans le même temps les valeurs des seuils correspondants.

Les tests présentés ci-dessus sont appliqués pour chaque modélisation polynomiale, et donc pour chaque domaine. Si tous les critères choisis sont remplis, le domaine courant est alors considéré comme étant correctement modélisé.

Dans le cas contraire, ce domaine courant est partitionné en 2^k sous-domaines (les plages de variation des k facteurs sont coupées en 2).

On trouve ici l'intérêt de l'emploi des plans factoriels complets à 3 niveaux par facteur : chaque sous-domaine récupère alors 2^k points du plan de l'itération précédente (sans compter les points récupérés des 2^k-1 autres domaines voisins de même taille).

➔ Ordre d'étude des sous-domaines

Lorsque le domaine courant est partitionné en sous-domaines, l'algorithme d'optimisation est appliqué sur chacun de ces 2^k espaces, dans un ordre déterminé.

Sur chacun des sous-domaines est calculée la moyenne des réponses aux 2^k points appartenant à cet espace et déjà calculés à l'itération précédente. Cette configuration de récupération de points est tabulée comme étant le mode 1 des plans factoriels complets, à 3 niveaux par facteurs, de tailles différentes.

L'ordre d'étude des sous-domaines est alors donné par le classement de ces moyennes, relativement à l'optimum recherché. Ainsi, par exemple, si le but est la maximisation de la fonction réponse, les premiers domaines considérés seront ceux dont les moyennes des réponses connues sont les plus grandes.

Cette manière de procéder favorise en toute logique la concentration des meilleures valeurs de réponse au début du processus d'optimisation.

➔ Conditions d'arrêt de l'algorithme

L'algorithme s'arrêtera au pire lorsque les domaines considérés seront assez petits pour qu'il y ait moins de 3^k points de grille, voire même qu'il y en ait moins de $\nu(k,2)+1$. Les modèles n'étant plus calculables, les domaines correspondants seront alors ignorés.

Cependant, dans le cas où la grille contient un nombre important de points, la situation précédente pourra être assez longue à survenir.

C'est pour cela que l'algorithme utilise un paramètre définissant le *niveau de zoom maximum* à réaliser. Il s'agit plus simplement du nombre maximum de scissions successives à réaliser, moins 1. Par hypothèse, le plan initial est réalisé avec un niveau de zoom unitaire.

Ce paramètre permet ainsi de fixer une condition de fin d'algorithme déterminée de façon sûre.

Enfin, il a également été défini un *niveau de zoom minimum* à réaliser, déterminant le nombre minimum de scissions à appliquer au domaine de base, et donc de définir une « finesse » de modélisation donnée.

Méthodes d'optimisation par plans d'expériences

La programmation de cet algorithme est récursive. Il y a auto-appels lorsque :

- soit le nombre minimum de zooms n'est pas encore atteint ;
- soit tous les critères de qualité d'ajustement des modèles ne sont pas remplis (le nombre maximum de zooms n'est pas encore atteint).

Pour ces cas donnés, le sous-domaine courant est alors scindé en 2^k sous-domaines, sur lesquels le même algorithme est appliqué.

3.4.2.2 Résumé des caractéristiques

➔ **Caractéristiques générales**

- Algorithme récursif ;
- Optimisation sur facteurs continus ou discrets ;
- Evolution dans un domaine d'étude contraint ;
- S'arrête à la fin de la réalisation de tous les plans permettant d'obtenir une modélisation de la fonction réponse par morceaux et répondant à des critères de qualité.

➔ **Paramètres ajustables**

- Critères de qualité d'ajustement des modèles aux données ;
- Valeurs des critères d'ajustement choisis ;
- Nombre de zooms minimum à réaliser ;
- Nombre de zooms maximum à réaliser.

Indirectement, la densité de la grille des points joue un rôle très important dans les performances de l'algorithme.

➔ **Points forts**

- Permet de connaître la fonction réponse avec une qualité connue, puisque issue des coefficients d'ajustement imposés par l'utilisateur ;
- Gère les domaines contraints par utilisation de plans optimaux ;
- L'optimum trouvé est global.

➔ **Points faibles**

- Nécessite un nombre important d'expériences pour tout modéliser (cet algorithme n'est utile que si l'ensemble du domaine est couvert).

3.4.2.3 Algorithme

Pour le domaine courant :

- (1) > Réaliser le plan d'expériences ;
- (2) > Calculer le modèle d'ordre 2 et réaliser l'analyse canonique ;
- (3) > Calculer les critères de qualité d'ajustement ;
 - ➔ Si le nombre minimum de zooms n'est pas atteint
 - ➔ Si le nombre maximum de zooms n'est pas atteint
 - ➔ Si tous les critères de qualité ne sont pas remplis
 - (4) > Découper le domaine courant en 2^k sous-domaines ;
Pour chacun des 2^k sous-domaines :
 - (5) > Appliquer le même algorithme (revenir au (1)) ;
 - ➔ Sinon
 - (6) > Calculer la meilleure valeur du modèle dans le domaine courant, et corriger, s'il y a lieu la valeur du point optimum ;
 - (7) > Quitter.

3.4.2.4 Application sur la fonction test

Tableau 9 - Résultats numériques de l'optimisation de la fonction test

Paramètres de l'algorithme	Info. optimisation		Meilleur point	
	Nb pts	Nb plans	Coordonnées	Réponse
$R^2 > 0.995 - R^2_a > 0.99$ Niv. zoom min : 2 Niv. zoom max : 5 Grille facteurs: [21, 21]	205	57	[0.6, -0.4]	2.26219

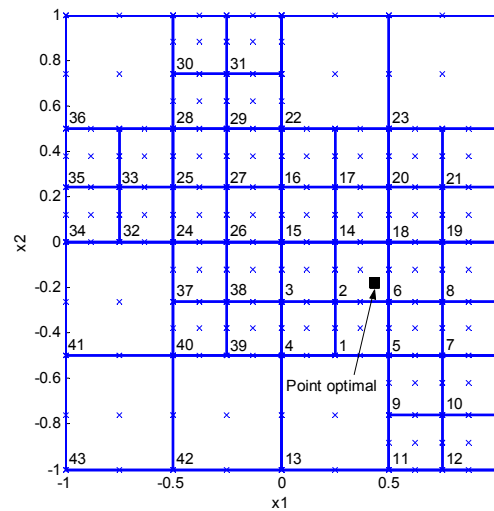


Figure 28 - Disposition des plans dans le DE aux niveaux de zoom maximum

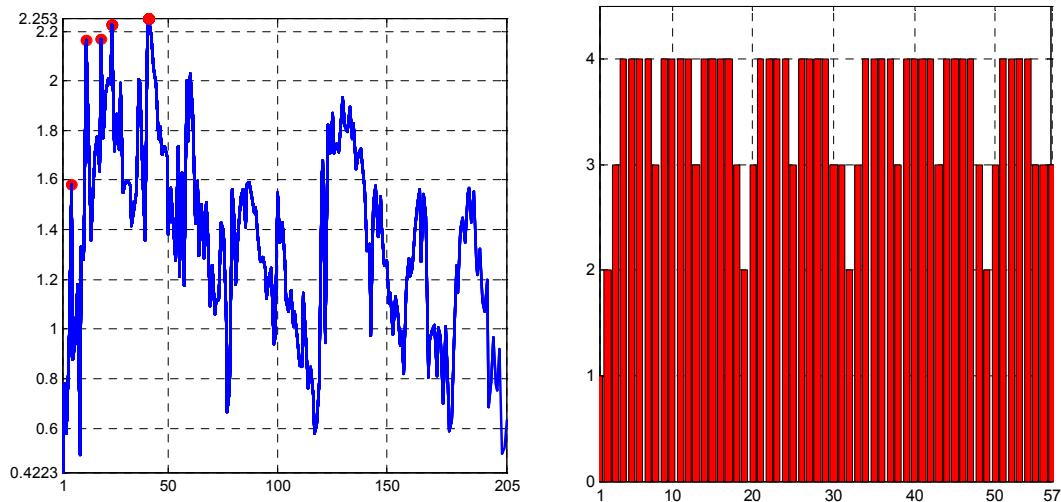


Figure 29 - Valeurs de la réponse aux points d'expériences (gauche)
Niveaux de zooms atteints (droite)

- Tous les points d'expériences calculables par cette méthode sont donnés par une grille régulière définie par les combinaisons entre 21 valeurs de chaque facteur. Le niveau de zoom minimum est 2 ; ainsi, au minimum, le DE doit être découpé en 4 sous-domaines (carrés ici) de côté valant $(1-(-1))/2=1$. Le niveau de zoom maximum est 5 ; ainsi, dans le cas extrême, le DE sera découpé en 256 sous-domaines de côté $(1-(-1))/2^{5-1}=0.125$. Enfin, les critères de qualité à satisfaire pour valider tout modèle du second ordre, sont les coefficients de corrélation multiples R^2 et R^2_a ; ils doivent valoir au moins 0.995 et 0.99 respectivement.
- Le nombre d'expériences requises par cet algorithme (205) est le plus élevé de toutes les méthodes présentées. Cet aspect est caractéristique de cette méthode, et en constitue un inconvénient majeur.

Méthodes d'optimisation par plans d'expériences

- Cependant, cette technique de modélisation bénéficie de précieux atouts, tels que le placement des expériences suivant les variations de la fonction réponse, et l'application d'un ordre préférentiel de modélisation.
- La Figure 28 illustre bien les changements de comportement de l'algorithme par rapport aux types de variations de la réponse. Les domaines les plus petits correspondent implicitement aux zones où la fonction objectif change souvent de pente. De ce fait, on retrouve les emplacements des 2 maxima.
- L'emplacement du point optimal est donné par l'analyse canonique appliquée au meilleur modèle, au sens de l'optimalité recherchée.
- La représentation des valeurs de la réponse permet de confirmer un autre intérêt de la méthode d'optimisation. L'ordre d'analyse des 2^k sous-domaines (obtenus par la scission d'un domaine donné) étant déterminé par l'analyse des valeurs de réponses déjà connues, il s'ensuit que les meilleurs sous-domaines sont analysés en premier. C'est pour cette raison que le meilleur point (hors modélisation) a été trouvé dès la 41^{ème} évaluation de la fonction réponse. Sur la Figure 28, chaque plan entier (non partitionné dans une itération postérieure) est numéroté ; cette information correspond à l'ordre de leur calcul.
- L'illustration de droite de la Figure 29 donne les niveaux de zooms correspondant à chacun des 57 plans réalisés. Même si le niveau de zoom maximum a été fixé à 5, l'algorithme n'a nécessité au maximum qu'un niveau égal à 4, pour lequel les domaines définis sont des carrés de côté valant $(1-(-1))/2^{4+1}=0.25$.

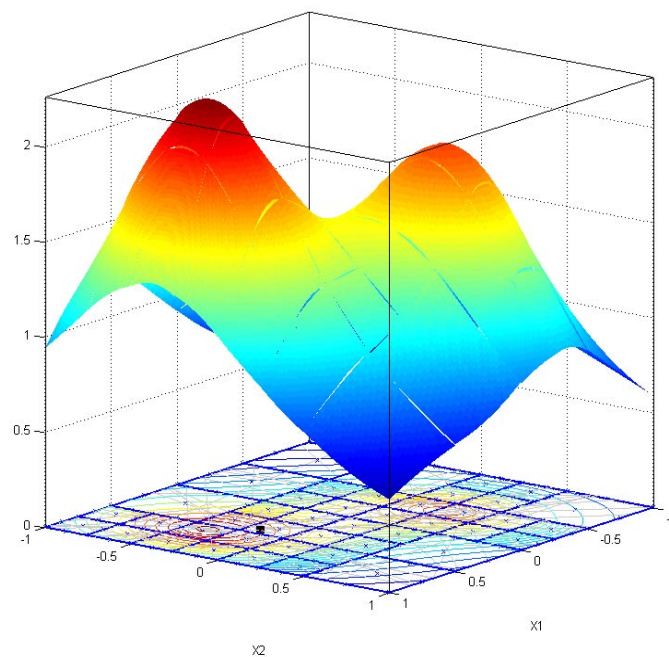


Figure 30 - Représentation spatiale des modèles du second degré utilisés au cours du processus d'optimisation

3.4.3. Utilisation de plans factoriels et zooms

3.4.3.1 Description

➔ Principe général

Globalement, le mode opératoire peut être vu comme la succession de 2 phases, correspondant à :

1. une modélisation globale du DE, par juxtaposition de plans, et par zooms éventuels ;
2. une optimisation autour du meilleur point trouvé lors de l'étape précédente.

Pour toutes les itérations de l'algorithme, le même type de plan est employé : plan factoriel fractionnaire 2^{k-r} .

La technique de modélisation globale déjà donnée au 3.4.1. sert de base à la réalisation de la première phase. Dans chaque sous-domaine est déduit un modèle du premier ordre. Cela permet ainsi de connaître la valeur des effets principaux en chacun de ces sous-espaces.

L'analyse des signes de ces effets détermine les sous-domaines dans lesquels, après partitionnement, la même technique est appliquée.

Cette étape de modélisation globale donne in fine les coordonnées du point d'expérience pour lequel la valeur de la réponse est la meilleure. Cette donnée sert d'initialisation à la seconde phase d'optimisation proprement dite.

Méthodes d'optimisation par plans d'expériences

La technique employée est proche de celle présentée au paragraphe 3.3.2. (optimisation par zooms sans calcul de modèles). Cependant, elle s'en distingue par quelques aspects.

➔ *Modélisation globale*

Les plages de variation de chacun des k facteurs sont découpées, afin de partitionner le DE en sous-domaines. En chacun d'eux, un plan factoriel fractionnaire est réalisé pour aboutir au calcul d'un modèle du premier degré. Toute cette démarche est développée au 3.4.1. .

Ces modèles donnent les valeurs des effets principaux des k facteurs. Cependant, la méthode présentée ici ne prend en compte que les signes de ces effets. On applique alors un mode de sélection particulier pour déterminer les sous-domaines à redécouper. Globalement, cette stratégie s'appuie sur l'examen des changements de signe des effets entre sous-domaines mitoyens. Certaines combinaisons de changements de signes indiquent en effet la présence d'optima (maxima ou minima).

Tous les sous-domaines ainsi détectés sont ensuite partitionnés en 2^k sous-espaces, sur lesquels le même type d'analyse est mené.

Le Tableau 11 illustre ces propos, en appliquant cette technique à la fonction analytique de test.

Afin d'avoir la certitude de ne pas partitionner les domaines à l'infini, on reprend pour cette méthode la notion de *niveau de zoom maximum*. Ainsi, lorsqu'une zone a été scindée en 2^k parties à deux reprises, le niveau de zoom vaut alors 3, c'est-à-dire le nombre de scissions plus 1.

Accessoirement, un *niveau de zoom minimum* a également été introduit. Ainsi par exemple, si cette grandeur vaut a , l'algorithme est obligé de partitionner chaque sous-domaine initial $a-1$ fois.

La procédure de zoom décrite précédemment revient in fine à concentrer les points d'expériences dans les zones où interviennent des changements nets de pentes relativement aux k facteurs. La modélisation globale est donc faite suivant les variations constatées de la fonction réponse. En cela, elle est comparable avec la méthode utilisant les plans du second ordre (§3.4.2.). Cependant, il y a ici de fortes économies d'expériences réalisées par le recours aux plans fractionnaires, et le mode d'analyse des variations de la fonction objectif est beaucoup plus simple.

➔ *Optimisation*

Le processus d'optimisation est en définitive une adaptation et une simplification de la méthode de modélisation globale présentée ci-dessus.

A toutes les itérations de l'optimisation, ce sont les 2^k partitions d'un domaine donné qui sont considérées.

Ainsi, lors de la première itération, le meilleur point trouvé par la modélisation précédente sert de centre à un tel groupe de partitions. La taille de chacun de ses sous-domaines est telle que la récupération de points, avec ceux utilisés lors de la modélisation globale, est totale. Il suffit en réalité de chercher la plus grande distance entre ce point central et tous les points voisins axiaux connus (pour lesquels une expérience a déjà été calculée).

Le meilleur point du groupe de partitions est utilisé comme nouveau centre, pour l'itération suivante de l'algorithme. Si ce meilleur point n'est autre que le centre actuel, alors la taille des partitions considérées pour l'itération à venir est calculée comme valant la moitié de celle des partitions actuelles. Dans les autres cas, il n'y a aucune modification de dimension.

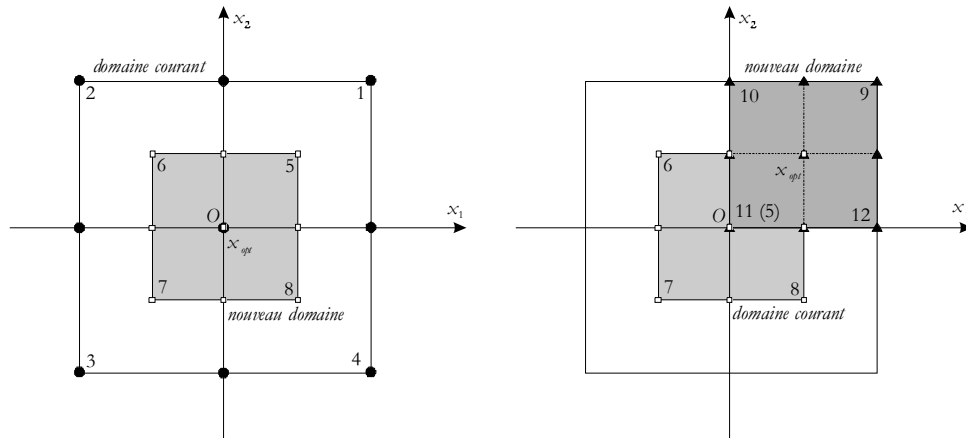


Figure 31 - Exemple de détermination des nouveaux domaines sur 2 itérations
 (● : premier plan ; □ : deuxième plan ; ▲ : troisième plan)

➔ Conditions d'arrêt de la phase d'optimisation

Au cours de la partie optimisation, on constate qu'il n'y a pas obligatoirement augmentation de la meilleure réponse trouvée, à chaque itération de l'algorithme. Il faut en effet plusieurs itérations pour que le processus trouve un point où la réponse est meilleure.

Le critère d'arrêt utilisé ici n'est pas basé sur l'augmentation des valeurs de la fonction objectif, mais sur le déplacement du meilleur point \mathbf{x}_{opt} sur un nombre donné d'itérations.

On définit alors un seuil, dont la valeur fixée par l'expérimentateur détermine la limite au-dessous de laquelle un déplacement de \mathbf{x}_{opt} est considéré comme non significatif. Ou de manière équivalente :

$$\text{Déplacement non significatif si } \left| \mathbf{x}_{opt,i} - \mathbf{x}_{opt,i-1} \right| < \text{seuil}$$

Il y a arrêt de l'algorithme dès qu'il y a consécutivement N_{nmax} déplacements non significatifs. La valeur de N_{nmax} doit également être donnée par l'utilisateur.

3.4.3.2 Résumé des caractéristiques

➔ Caractéristiques générales

- Algorithme itératif et récursif ;
- Optimisation sur facteurs continus ou discrets ;
- Evolution possible dans un domaine d'étude contraint.

➔ Paramètres ajustables

- Nombre minimum de zooms à réaliser ;
- Nombre maximum de zooms à réaliser ;
- Nombre de découpages du domaine d'étude initial selon chacune des k dimensions ;
- Nombre d'itérations sans améliorations significatives de la meilleure réponse trouvée ;
- Niveau à partir duquel une amélioration est jugée significative.

➔ Points forts

- L'algorithme permet de réaliser un balayage exhaustif du DE ;
- Permet de réaliser une analyse de screening sur l'ensemble du domaine (construction de la carte des variations d'influence des facteurs relativement à une réponse donnée) ;
- Le nombre d'expériences nécessaires est fortement réduit grâce à l'utilisation de plans fractionnaires, et à la récupération particulière de points entre eux ;
- Les techniques associées au screening peuvent être appliquées sur chacun des sous-domaines couverts, notamment l'analyse de la variance.
- Les points d'expériences sont régulièrement espacés dans le domaine d'étude ; le maillage k -dimensionnel est donc régulier et l'interpolation obtenue par tessellation est uniforme en précision ;

Méthodes d'optimisation par plans d'expériences

- L'optimum trouvé est global ;
- Les points d'expériences peuvent être utilisés pour la construction de modèles d'ordre élevé ;
- Optimisation sur le meilleur point trouvé lors de la modélisation précédente ;
- Possibilité de calculer une modélisation plus « fine » autour du point optimum.

➔ **Points faibles**

- Nécessite un nombre non négligeable d'expériences pour tout modéliser ; en effet, cet algorithme n'est utile que si l'ensemble du domaine est couvert ;
- Ne peut gérer entièrement les domaines contraints.

3.4.3.3 Algorithme

➔ **Modélisation globale**

- (1) > Définir les nombres N_{p_i} de divisions du domaine d'étude selon les k dimensions ;
- (2) > Pour chacun des sous-domaines ainsi définis :
 - (3) ➔ Calculer les générateurs indépendants afin de récupérer les points d'expériences des plans déjà réalisés sur les domaines mitoyens ;
 - (4) ➔ Réaliser le plan d'expériences factoriel ;
 - (5) ➔ Calculer le modèle du premier ordre et déduire les signes des k effets principaux ;
- (6) > Déterminer les sous-domaines par l'examen des changements de signes des effets.
- (7) > Pour chacun des sous-domaines trouvés, ou pour tous les sous-domaines si le niveau de zoom minimum n'est pas atteint :
 - (8) ➔ Partitionner en 2^k sous-espaces ;
 - (9) ➔ Si le niveau de zoom actuel n'est pas la limite maximum ;
 - Boucler en (3) ;
 - (10) ➔ Si le niveau de zoom actuel est la limite maximum ;
 - Renvoi du meilleur point trouvé ;
 - Fin de l'algorithme ;

➔ **Optimisation**

- (1) > Définir un point d'origine $\mathbf{x}_{ref} = \mathbf{x}_0$ appartenant au domaine d'étude possible ; Mettre N_{ns} à 0 ;
- (2) > Trouver le point voisin le plus éloigné de \mathbf{x}_{ref} , axial et connu ; en déduire la taille des 2^k domaines ayant \mathbf{x}_{ref} comme point commun ;
- (3) > Réaliser un plan factoriel fractionnaire dans chacun des 2^k domaines (leur définition est telle que les récupérations de points sont maximales) ;
- (4) > Déduire la valeur de la fonction objectif aux points non calculés par les plans fractionnaires ;
- (5) > Déduire les coordonnées $\mathbf{x}_{opt,i}$ du meilleur point ;
 - ➔ Si $\mathbf{x}_{opt,i} = \mathbf{x}_{ref}$
 - Définir 2^k autres domaines, de centre $\mathbf{x}_{opt,i}$, et de taille moitié de celle des domaines courants ;
 - ➔ Si $\mathbf{x}_{opt,i} \neq \mathbf{x}_{ref}$
 - Définir 2^k autres domaines, de centre $\mathbf{x}_{opt,i}$, et de taille identique à celle des domaines courants ;
- (6) > Calculer $a = |\mathbf{x}_{opt,i} - \mathbf{x}_{opt,i-1}|$;
 - ➔ Si $a > \text{seuil}$
 - $N_{ns} = N_{ns} + 1$;
 - ➔ Si $a \leq \text{seuil}$
 - $N_{ns} = 0$;
- (7) > Tester le critère d'arrêt ;
 - ➔ Si $N_{ns} = N_{nsmax}$
 - Renvoi du meilleur point trouvé ;
 - Fin de l'algorithme ;

3.4.3.4 Application sur la fonction test

Tableau 10 - Résultats numériques de l'optimisation de la fonction test

Paramètres de l'algorithme	Info. optimisation		Meilleur point	
	Nb pts	Nb plans	Coordonnées	Réponse
Nb min zooms : 1 Nb max zooms : 5 Seuil prise en compte : 0.1 Nb max d'itérations sans amélioration : 5	91	80	[0.5625, -0.375]	2.26523

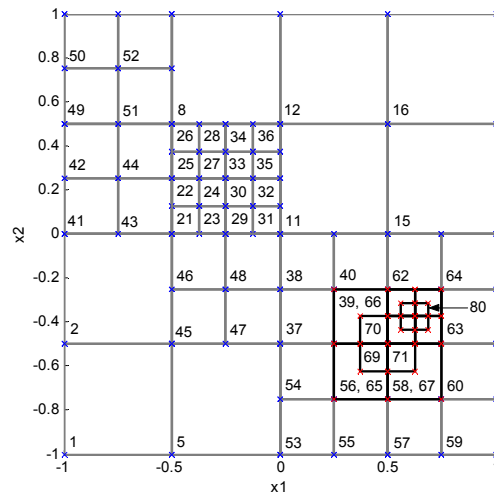


Figure 32 - Disposition des plans dans le DE

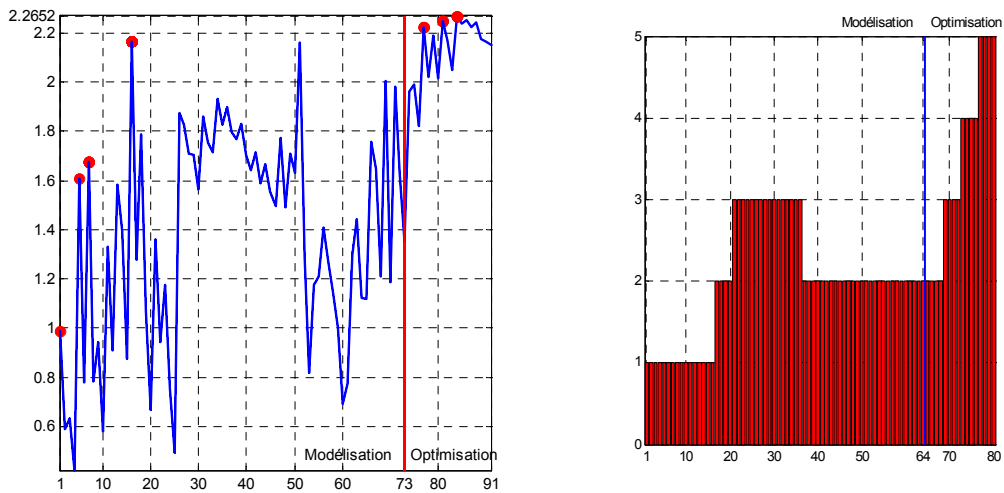


Figure 33 - Valeurs de la réponse aux points d'expériences (gauche)
Niveaux de zooms atteints (droite)

- Les figures précédentes font apparaître le déroulement en 2 volets de cette méthode d'optimisation : dans un premier temps il y a modélisation de l'ensemble du domaine d'étude, et ensuite, optimisation autour du meilleur point trouvé au cours de la première étape.
- Dans notre exemple, la modélisation globale demande 73 expériences (réparties en 64 plans), et l'optimisation proprement dite 18 de plus (demandées par 16 plans supplémentaires).
- Lors de la première itération, les bornes de variation des 2 facteurs sont scindées en quatre : le DE est alors partitionné en 16 sous-domaines. Les signes des effets principaux sont alors analysés, comparés entre eux. La stratégie employée est illustrée par le Tableau 11.
- A l'issue du processus de modélisation, le point de coordonnées $[0.6, -0.4]$ est celui dont la réponse est la plus grande. L'étape d'optimisation est donc initialisée par ce point. La technique employée est une simplification du processus de modélisation. A chaque itération on note une augmentation du niveau de zoom, jusqu'à atteindre la valeur limite (5).
- Encore une fois, il est à noter que le cas particulier où seuls 2 facteurs sont considérés ($k=2$) n'est pas le meilleur pour faire apparaître l'intérêt propre de cette méthode de modélisation – optimisation. L'avantage des plans factoriels fractionnaires apparaît d'autant plus que le nombre de facteurs augmente...

Méthodes d'optimisation par plans d'expériences

Tableau 11 - Tableau des signes des effets sur les 16 premières partitions
(Pour chaque partition, le signe de gauche donne l'effet du facteur x_1 , et le signe de droite celui du facteur x_2)

4	+-	8	--	12	--	16	--
3	++	7	--	11	--	15	--
2	++	6	++	10	+-	14	--
1	++	5	++	9	++	13	++

Tableau 12 - Tableau des différences de signes, entre les 16 premières partitions

4	1-1	8	1-0	12	0-0	16	0-0
3	1-2	7	2-2	11	1-0	15	0-0
2	0-0	6	1-2	10	2-2	14	1-1
1	0-0	5	0-0	9	1-1	13	1-1

- Le Tableau 11 donne les signes des effets calculés sur les 16 partitions considérées lorsque le niveau de zoom vaut 1. Chaque cellule correspond à une partition ; pour chacune d'elles, le signe de gauche est celui de l'effet du premier facteur (x_1) et le signe de droite celui du second facteur (x_2).
- L'algorithme considère donc ces 32 signes pour déterminer les partitions à scinder à nouveau.
- Ainsi, pour une partition donnée, il faut examiner tous les domaines voisins (dans les directions axiales uniquement). On compte alors, pour chaque facteur, le nombre de domaines voisins pour lesquels les signes des effets des facteurs correspondants sont différents. Par exemple, considérons la partition n°3 où les effets des 2 facteurs sont positifs. Pour le premier facteur (x_1), la partition n°7 est la seule (parmi les domaines voisins et axiaux du domaine n°3) pour laquelle l'effet de ce premier facteur est de signe différent (négatif). On recense donc 1 changement de signe concernant x_1 pour ce domaine. Pour le second facteur, les partitions 4 et 7 donnent des effets négatifs de x_2 : il y a alors 2 changements pour ce facteur. On aboutit donc au résultat noté par « 1-2 ». La même opération est répétée pour chaque domaine ; les résultats sont résumés par le Tableau 12.
- Chacune des partitions pour lesquels il y a des changements de signe selon les k facteurs, est alors scindée en 2^k sous-domaines. La même procédure est ensuite appliquée sur ces nouveaux espaces de volumes plus petits. Cet algorithme récursif opère ainsi de fait des opérations de zooms.

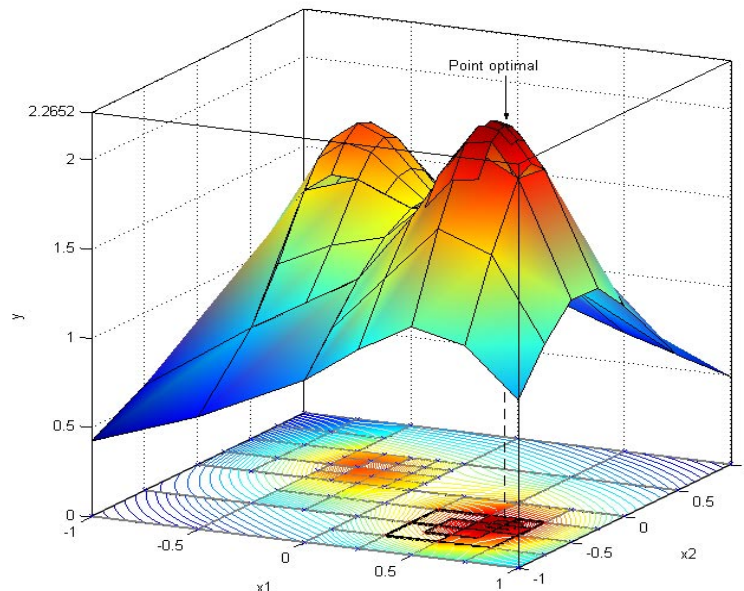


Figure 34 - Représentation spatiale des modèles utilisés au cours du processus d'optimisation

4. Comparaison des différentes méthodes

Dans le paragraphe 3. , nous avons détaillé les caractéristiques les plus importantes de chaque méthode d'optimisation, en les considérant une à une. Elle s'est dispensée de les comparer entre elles.

Les différentes stratégies présentées sont profondément différentes et malaisées à rapprocher. Ainsi, nous proposons une comparaison de leurs principales caractéristiques.

Le paragraphe 4.1. dressera un bilan des méthodes, au vu des résultats numériques obtenus par application sur la fonction analytique de test. Ces considérations serviront d'illustration à des analyses plus générales.

Le paragraphe suivant donnera quelques indications quant au choix de la méthode à employer, par considération des principales caractéristiques des méthodes d'optimisation par PE.

4.1. Applications sur la fonction test

4.1.1. Méthodes par glissements

- 1) *Utilisation de plans du 1^{er} ordre* (§3.2.1.)
- 2) *Utilisation de plans du 2nd ordre* (§3.2.2.)
- 3) *Glissement sans calcul de modèles* (§3.2.3.)

L'intérêt des deux premières méthodes d'optimisation est le faible nombre de points utilisés, en comparaison des autres algorithmes. Cela tient principalement à la taille des plans utilisés, relativement à celle du DE lui-même. Dans tous les cas, la valeur 10% a été considérée ; ainsi, chaque plan est réalisé dans un domaine carré de $(1-(-1)).10\%=0.2$ de côté. Augmenter ce paramètre aurait certainement accru la vitesse de convergence dans la région de l'optimum, mais la détermination de sa localisation aurait été moins précise.

Pour chacune des 3 méthodes, les algorithmes correspondants ont été lancés 2 fois, avec un point initial différent. Celui-ci constitue la plus importante valeur d'initialisation de l'algorithme. En effet, lorsque le point initial est en $[0, 0]$, les méthodes par glissement convergent malheureusement vers le maximum local.

Il est à noter que tous les algorithmes déterministes « classiques » (Gradient Conjugué, algorithme par simplexes de Nelder-Mead, etc.) commettent la même erreur.

Les mêmes méthodes convergent vers l'optimum global, lorsque le point initial est déplacé en $[0.5, 0.5]$ par exemple.

On retrouve le fait que ces algorithmes sont intrinsèquement de portée locale.

Pour des plans de même taille, la méthode de glissement utilisant les plans du premier ordre requiert dans tous les cas moins de points d'expériences que celle ayant recours aux plans du second ordre.

De plus, ces 2 méthodes se différencient par les récupérations de points entre plans : elles sont plus importantes dans le second cas.

Le faible nombre d'expériences demandées par les plans du premier ordre est balancé par les fortes récupérations de points possibles entre plans du second ordre.

La troisième méthode par glissements de plans est une adaptation du concept de Plus Grande Pente.

Le nombre de points utilisés est relativement important ; cela est principalement dû aux vérifications successives réalisées par les points diagonaux et les points axiaux ainsi que les réductions de pas.

Un tel algorithme est très utile pour vérifier le caractère optimal d'un point, par l'examen des points voisins de la grille.



Comparaison des différentes méthodes

Le choix du point initial est crucial. Lorsque la localisation de l'optimum ne peut être pressentie, le point central du DE reste statistiquement le meilleur choix.

Sous réserve de tailles de plans raisonnables (supérieures à 5% et inférieures à 30%), les deux premières méthodes par glissements donneront des résultats rapidement et relativement précis.

Diminuer la taille augmentera le nombre d'expériences nécessaires mais sera susceptible d'augmenter la précision de l'optimum trouvé. L'augmentation de la taille induira les effets inverses.

Il doit être également pris en compte que le résultat exploitable (x_{opt} et y_{opt}) n'est obtenu qu'à l'extrême fin du déroulement des algorithmes.

Il a été vu que la définition d'un plan partiellement défini hors du DEP vient stopper le processus d'optimisation. De là, afin d'approcher au mieux les conditions optimales situées à proximité des frontières, le recours aux plans optimaux peut constituer une solution intéressante.

4.1.2. Méthodes par zooms

- 1) *Zooms – Rotations – Translations* (§3.3.1.)
- 2) *Zooms sans calcul de modèles* (§3.3.2.)

Les algorithmes fonctionnant par zooms successifs se caractérisent par la grande précision de leurs résultats : les diminutions successives et contrôlées des domaines sont à l'origine de cette caractéristique.

Pour une précision donnée, chaque méthode se distingue alors par le nombre d'expériences qu'elle nécessite. En grande partie, cela tient alors au modèle polynomial sous-jacent utilisé, et donc au type de plan employé.

La première méthode n'utilise que des plans factoriels avec au minimum 3 points par facteurs, afin de déduire des modèles du second degré.

Pour la seconde méthode, sans calcul de modèles, sont requis des plans factoriels complets à 2 niveaux par facteur, auxquels un point au centre est ajouté. Par conséquent, au mieux, c'est un modèle du premier ordre qui peut être calculé. Le coût global s'en trouve donc substantiellement diminué.

Lorsqu'on observe le nombre de plans réalisés par chacune des 2 méthodes, ainsi que le nombre d'expériences correspondant, on entrevoit les différences de comportement des 2 algorithmes. Ainsi, la seconde méthode demande peu de points, répartis en beaucoup de plans. La première fait apparaître le phénomène inverse : beaucoup de points en peu de plans.

A cette première explication, vient s'ajouter l'efficacité même de chaque algorithme, ou, en d'autres termes, celle de l'opération de zoom. Dans le second cas, chaque nouveau domaine possède, au mieux, la moitié du volume du domaine précédemment considéré. Cet aspect est quantifié par le coefficient de réduction. Dans les calculs présentés ici, cette grandeur a été fixée à 2, afin de bénéficier le plus possible des récupérations de points éventuelles. Pour ce qui concerne la méthode Zooms – Rotations – Translations, la « puissance » du zoom est fonction de la configuration topologique rencontrée. Ainsi, dans les cas les plus favorables, où la modélisation d'ordre 2 décrit un optimum du même type que celui cherché, et où le point stationnaire est intérieur au DE, le nouveau domaine peut être plus de 3 fois plus petit que son précédent. La vitesse de convergence est alors plus grande. On constate en effet qu'il ne faut que 7 plans pour la première méthode pour trouver une estimation de $y_{maxglob}$ meilleure que celle obtenue par la seconde méthode avec le double de plans.

Pour finir, on remarquera que les 2 méthodes ont convergé vers le maximum global. Le fonctionnement des 2 algorithmes ne permet en rien de généraliser ce résultat : un placement différent des maxima aurait pu induire ces 2 méthodes en erreur en les faisant converger vers un optimum local. Ce cas de figure est plus probable avec le second algorithme, pour lequel chaque plan ne comporte qu'un nombre limité d'expériences. La première méthode évite partiellement à cette lacune en employant des plans permettant de juger des effets quadratiques pour chaque facteur. Cependant, les modélisations polynomiales d'ordre 2 qui en sont déduites peuvent être insuffisantes vis-à-vis des variations de la fonction réponse à prendre en compte. Ces dernières sont moyennées sur l'étendue du DE ; aussi le processus d'optimisation donne un bon résultat si cette modélisation de la fonction réponse est proche de la réalité.



Comparaison des différentes méthodes

La première méthode est plus la complexe. Son efficacité est réelle, en particulier lorsque les conditions optimales sont intérieures au DEP.

Le recours aux plans factoriels à 3 ou 4 niveaux par facteur rend cette méthode déconseillée pour les grandes valeurs de k ($k > 4$).

Cette méthode permet en outre de prendre en compte des facteurs discrets.

Elle peut aussi être employée lorsque des contraintes sont actives dans le domaine d'étude : l'emploi des plans optimaux permet d'aboutir à des solutions intéressantes dans toutes les situations.

La seconde méthode est robuste, se resserre très rapidement sur un optimum. La valeur du critère d'arrêt fait l'objet d'un compromis : elle doit permettre à l'algorithme de trouver la localisation de l'optimum, tout en évitant d'imposer un nombre excessif d'expériences pour améliorer la précision de la réponse en ce point.

Si l'on veut bénéficier de récupérations de points, il est impératif de fixer le coefficient de réduction à 1. Cette méthode ne peut être appliquée que lorsque le domaine d'étude est hyper-rectangulaire.

4.1.3. Méthodes exhaustives

- 1) Utilisation de plans factoriels (§3.4.1.)
- 2) Utilisation de plans du 2nd ordre (§3.4.2.)
- 3) Utilisation de plans factoriels et zooms (§3.4.3.)

Ces méthodes ont en commun l'exploration complète du DE, et pour certaines du domaine d'étude possible (DEP) lorsque les contraintes sont prises en compte. Ces 3 méthodes donnent les variations de la fonction réponse sur l'ensemble du domaine. A partir de là, il y a déduction ou recherche approfondie des conditions optimales.

Les 3 algorithmes convergent vers le maximum global. Même s'il est toujours possible de concevoir des fonctions particulières pour les induire en erreur, l'exploration systématique du DE limite considérablement le risque de passer à côté des meilleures conditions.

Il est difficile de comparer les résultats des 3 méthodes exhaustives, car celles-ci n'ont pas les mêmes caractéristiques fondamentales. Ainsi, la première utilise un placement des points d'expériences connu a priori, alors que les 2 autres placent ces expériences en fonction de l'analyse des variations constatées de la fonction réponse. De plus, seule la dernière méthode fait une recherche par zooms de l'optimum, consécutive à la modélisation globale.

La procédure en 2 temps - modélisation puis optimisation - de cette dernière méthode, permet ainsi d'obtenir une estimation très précise de y_{opt} .

Les 2 premières méthodes se sont accordées sur le même résultat. Ceci est dû en grande partie au choix de leurs paramètres de fonctionnement. En effet, les 2 algorithmes se sont appuyés sur des grilles dont les pas sont des multiples ($\pi_f = 0.2$ et $\pi_f = 0.1$ respectivement), et x_{opt} s'est trouvé être une des 121 valeurs communes.

L'intérêt fondamental de la modélisation globale par plans factoriels n'apparaît pas ici, car il est impossible d'utiliser les plans fractionnaires ($k=2$). Ici, un plan 2^2 est employé pour chaque sous-domaine. Or, ces méthodes sont d'autant plus intéressantes que le nombre de facteurs augmente : il est alors possible de recourir aux plans possédant de forts coefficients de réduction r .

Elles gardent toutefois un intérêt, même dans le cas présent où $k=2$, puisque le nombre d'évaluations de la fonction réponse est en moyenne divisé par 2 relativement à la méthode de modélisation par plans de RSM. Cette dernière est en effet très gourmande en expériences, la rendant ainsi uniquement utilisable pour les petites valeurs de k (2 et 3).

Ces 3 méthodes exhaustives sont intéressantes car elles placent les points selon les variations constatées de la fonction réponse. Cette caractéristique donne la possibilité de construire, dans un second temps, des modélisations de bonne qualité de la fonction réponse.

De ce fait, elles peuvent constituer l'étape précédent l'optimisation indirecte, pendant laquelle les conditions optimales sont recherchées à partir de modèles.

Comparaison des différentes méthodes



Toutes les méthodes exhaustives travaillent par partition du DEP en sous-domaines. Celles utilisant des plans de screening ne travaillent pas sur les sous-domaines où au moins une expérience n'est pas réalisable. Là encore, l'utilisation de plans optimaux peut être envisagée afin de prendre en compte ces sous-espaces contraints. La deuxième méthode utilise déjà cette solution.

Le placement des points nécessaires à l'optimisation globale diffère suivant la méthode employée. Ainsi, il est :

- indépendant des variations de y , dans la 1^{ère} méthode ;
- dépendant des changements de signe des pentes mesurées de y , dans la 3^{ème} méthode ;
- dépendant des qualités d'ajustement de modèles du second ordre sur les variations de y , dans la 2^{ème} méthode.

Dans tous les cas, à l'issue de la phase de modélisation globale, les coordonnées du point optimal sont déduites. La troisième méthode donne la possibilité de gagner en précision sur les caractéristiques de cet optimum, par l'application dans une seconde étape d'une procédure d'optimisation proprement dite.

On comprend bien que la précision des résultats issus de la première méthode est fonction du nombre de partitions du DEP en sous-domaines. Ce paramètre permet de connaître le nombre total de points d'expériences nécessaires, avant le lancement de l'optimisation. De fait, il doit être déterminé de telle sorte que le coût global du processus d'optimisation reste acceptable.

La méthode de modélisation globale par plans de RSM est parfaite pour établir les variations de la fonction réponse sur le DEP. Les contraintes y sont en effet gérées complètement.

Cependant, le coût de cette méthode est élevé pour les valeurs de k supérieures à 4.

La dernière méthode est la plus avantageuse car elle permet d'explorer le DEP à moindres frais, grâce à l'utilisation de plans fractionnaires, et d'aboutir à une valeur approchée de bonne qualité du point optimum, par la stratégie de zooms appliquée dans le deuxième temps.

5. Conclusion

Ce chapitre a présenté des stratégies d'optimisation reposant sur l'utilisation de la méthode des plans d'expériences.

Ces méthodes ont été classées en 3 groupes, suivant la manière dont elles utilisent les PE.

La première classe définit les méthodes procédant par glissements successifs de plans identiques. Ceux-ci sont de petite taille relativement au DE. Leurs placements se déduisent les uns des autres par l'exploitation des modèles qu'ils permettent de calculer ou directement de l'examen des valeurs brutes issues des expériences.

Le deuxième groupe comprend les algorithmes recourant à des plans de même type, mais dont les zones d'application sont successivement réduites en taille, d'itérations en itérations. Le plan initial est généralement réalisé sur la plus grande zone que permet la définition du domaine d'étude.

Enfin, les méthodes exhaustives forment la troisième classe. Elles procèdent à un examen complet et systématique du DE. Cette opération revient dans tous les cas à partitionner le DE en sous-domaines, à réaliser un plan d'expériences en chacun d'eux, puis d'en déduire une modélisation locale des réponses.



Les principaux avantages et inconvénients de chacune de ces méthodes ont été exposés dans les paragraphes précédents.

Il est cependant plus intéressant pour un expérimentateur désireux de réaliser une optimisation, de connaître quelle méthode sied le mieux à son problème particulier. Cette question, très naturelle, n'en est pas moins extrêmement ardue.

Dans un premier temps, on peut s'interroger sur le choix entre les méthodes d'optimisation « classiques » (plus grande pente, gradient conjugué, algorithme de Powell, etc.) et les méthodes d'optimisation par plans d'expériences.

Ces dernières sont particulièrement intéressantes lorsqu'au moins une des propositions suivantes est rencontrée :

- la fonction réponse (ou fonction objectif) doit être modélisée, partiellement ou globalement ;
- les fonctions de contrainte doivent être modélisées, partiellement ou globalement ;
- l'optimisation doit être réalisée avec le moins d'évaluations possible de la réponse ;
- il est nécessaire de connaître l'erreur concédée dans les opérations de modélisation de la réponse ;
- certains facteurs sont discrets ou discrétisés afin de prendre en compte leur précision intrinsèque ;
- des contraintes en valeurs atteintes doivent être prises en compte et appliquées.

Reste à choisir parmi les différentes méthodes d'optimisation par PE.

Le tableau suivant donne des appréciations purement qualitatives sur quelques caractéristiques importantes, à des fins de comparaison. Il a été obtenu à partir des comportements constatés sur les divers problèmes traités, et notamment sur les tests décrits au chapitre 4.

A noter que cette table ne tient pas du tout compte des paramètres propres à chaque algorithme ; si ces derniers sont mal choisis pour une méthode donnée, les points forts généralement constatés pour cette technique peuvent disparaître, et devenir des inconvénients.

Conclusion

Tableau 13 - Comportements généralement constatés pour les 8 méthodes d'optimisation par plans d'expériences
(0 : nulle ; 1 : faible ; 2 : bon - moyen ; 3 : grand - important ; 4 : très important)

Groupe	Méthode	Ordre modèles	Type optimum	Modélisation	Pr. en c. contraintes	Précision	Récupération de points	Coût total	Rapidité
Glissements de plans	Plans du 1 ^{er} ordre	1	Local	Partielle	Oui (*)	2	0	1	3
	Plan du 2 nd ordre	2	Local	Partielle	Oui (*)	2	3	1	3
	Sans modèle	-	Local	-	Oui	1	3	2	2
Zooms successifs	Z - R - T	2	Local	Partielle (+)	Oui	3	1	3	3
	Sans modèle	-	Local	-	Non	3	1	2	2
Modélisation Globale	Plans de screening	1	Global	Globale	Oui (**)	1	4	3	-
	Plans de RSM	2	Global	Globale	Oui	2	4	4	-
	Screening et zooms	1	Global	Globale	Oui (**)	3	4	3	-

(+): La disposition des plans d'expériences, et donc des modèles dans le DE ne permet pas de considérer la modélisation de la fonction réponse comme globale. Seule la zone entourant les conditions optimales peut prétendre être modélisée : cette opération n'est donc que partielle.

(*) : Dès qu'une contrainte devient active, l'algorithme s'arrête.

(**) : Les sous-domaines étant concernés par des contraintes, ne sont pas considérés.

Toutes les méthodes peuvent gérer des facteurs discrets.

Conclusion